UNIVERSIDAD
NACIONAL
DE COLOMBIA

EL TEOREMA DE PITÁGORAS, PRETEXTO Y CONTEXTO PARA LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA

Cindy Carolina Hernández Cruz

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias

Bogotá, Colombia

2019

EL TEOREMA DE PITÁGORAS, PRETEXTO Y CONTEXTO PARA LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA

Cindy Carolina Hernández Cruz

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de:

Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Director:

José Reinaldo Montañez Puentes

Profesor Departamento de Matemáticas

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias

Bogotá, Colombia

2019

A mis padres,
a mi hermano y
a mi esposo

Agradecimientos

Agradezco a mi familia que me apoyó incondicionalmente en este camino, ellos me dieron ánimo cada vez que fue necesario.

Agradezco también al profesor Reinaldo Montañez, quien aceptó el reto de dirigir este trabajo. Gracias a él por su paciencia y por todo el tiempo que le dedicó a este trabajo.

Por último, quiero agradecer a María Isabel Lizarraga, Eduardo, Carlos y Javier Fandiño dueños del Liceo Navarra, quienes me apoyaron en este proyecto y me dieron las herramientas que necesité durante el tiempo de la maestría.

Resumen

En este trabajo se presenta una propuesta didáctica para la enseñanza del Teorema de Pitágoras haciendo, entre otros, uso de elementos históricos y tecnológicos. Al respecto se revisan elementos de la aritmética, la geometría, el álgebra y la trigonometría como pretexto para el aprendizaje del Teorema y recíprocamente se hace uso del Teorema como contexto para el estudio de algunos aspectos de las áreas mencionadas.

Palabras clave: Teorema de Pitágoras, semejanza y razones trigonométricas.

Abstract

In this paper a didactic proposal for teaching the Pythagorean Theorem is presented using historical and technological elements. In this regard, elements of arithmetic, geometry, algebra and trigonometry are reviewed to learn the Theorem; additionally, this Theorem is used as a context to study certain aspects of the mentioned areas.

Keywords: Pythagorean proposition, similarity and trigonometric functions.

Contenido

Lista de figuras

Lista de tablas

Pág.

Introducción

A lo largo de la historia la geometría ha sido una de las áreas mas tangibles de las matemáticas y presente en la naturaleza. Desde la antigüedad surgió el interés de describir el universo por medio de las matemáticas. De esta manera, haciendo observaciones se llegó a la formalización de algunos conceptos de la geometría.

En general, el estudio de las matemáticas se desarrolla, observando patrones y regularidades, formulando y probando conjeturas, formalizando los conceptos y demostrando resultados. Consideramos que siguiendo estos lineamientos, los estudiantes logran tener un aprendizaje que consideramos más significativo. En el caso específico de este trabajo, el Teorema de Pitágoras se abordó siguiendo el proceso descrito.

En particular, para que el estudiante logre una mayor comprensión del Teorema y estudiar diferentes pruebas, debe conocer varios conceptos de la geometría plana, entre otras áreas de figuras planas, congruencia, semejanza, algunos aspectos de la geometría del círculo, y algunos elementos del álgebra, como productos notables y soluciones de ecuaciones. De esta manera, el Teorema de Pitágoras se constituye en un pretexto para el estudio de los conceptos básicos de la geometría.

Ahora bien, también consideramos el Teorema de Pitágoras como un contexto, pues haciendo uso de esté, nos permite un acercamiento a algunos resultados de la teoría de números relacionados con los números primos y con el teorema de Fermat, además nos permite acercarnos a los números reales, a las relaciones trigonométricas y a los teoremas del seno y del coseno.

Para el desarrollo del trabajo se consideraron cuatro capítulos de los cuales, a continuación, se hace una pequeña descripción.

En el primer capítulo se consideraron los aspectos históricos relacionados con el Teorema de Pitágoras, en particular los relacionados con la construcción de ternas pitagóricas propuestas por lo babilonios, chinos, hindúes, egipcios, Platón y la escuela pitagórica. Además, se muestran los obstáculos epistemológicos a los que se enfrentaron los pitagóricos en la aplicación del Teorema en un triángulo rectángulo isósceles, ya que aparecían magnitudes inconmensurables. Al final del capítulo se muestra como Euclides en su primer libro presenta la demostración del Teorema de Pitágoras y su recíproco, así como también se muestra la manera como Hilbert abordó dicho Teorema.

En el segundo capítulo se consideran los aspectos disciplinares. Al respecto se presentan, las nociones básicas de geometría siguiendo como texto guía el libro "Geometría Moderna" de Moise, tomando su notación, definiciones y teoremas. En particular se estudian la congruencia y la semejanza de figuras planas, el teorema de Thales (resultado que no se encuentra en el texto guía), elementos y teoremas sobre la circunferencia, las áreas de figuras planas, una prueba del Teorema de Pitágoras haciendo uso de las áreas de figuras planas, la recta numérica, las razones trigonométricas, el teorema del seno y del coseno y algunos resultados de la teoría de números. Adicional a esto, se presenta una prueba del Teorema de Pitágoras haciendo uso de resultados relacionados con el círculo y diferentes pruebas de este Teorema, como las presentadas por Pappus, Pitágoras, Thâbit Ibn Qurra, Bhaskara, Garfield, Perigal y Da Vinci.

En el tercer capítulo se presenta una propuesta didáctica para la enseñanza del Teorema de Pitágoras. Se muestran los aspectos curriculares que justifican la propuesta de acuerdo a los lineamientos del MEN (Ministerio de Educación Nacional) y la relación de la misma con los niveles propuestos en el modelo de Van Hiele. Al respecto, el MEN propone que el estudiante debe aplicar las propiedades de semejanza y congruencia en la solución de problemas, debe reconocer propiedades y relaciones usadas en las demostraciones de teoremas, calcular áreas de regiones planas, usar medidas estandarizadas, utilizar los números reales y sus diferentes representaciones, entre otros.

En este mismo capítulo se presentan los talleres relacionados con la propuesta, al respecto cada taller tiene un título, un objetivo y una serie de problemas rutinarios y no rutinarios, problemas que exigen del estudiante creatividad para su solución, problemas en los que se pide al estudiante observar patrones y regularidades y hacer conjeturas y problemas que involucran el uso de herramientas tecnológicas y algunos referentes históricos relacionados con la construcción de ternas pitagóricas. Es de anotar que los talleres se aplicaron a algunos estudiantes y al respecto al final del capítulo se presentan algunas observaciones de los resultados obtenidos por los estudiantes y al final en los anexos del trabajo se encuentran algunos talleres resueltos por los estudiantes.

Cabe anotar que para tratar de dar cumplimiento al objetivo de estudiar el Teorema de Pitágoras como pretexto, se abordan en las actividades temas relacionados con el cálculo de áreas, áreas por recubrimiento, diferentes demostraciones del teorema de Pitágoras, que permitió afianzar conceptos semejanza y congruencia de figuras, geometría del círculo. Y para dar cumplimiento al objetivo de estudiar el Teorema de Pitágoras como contexto, se abordan en las actividades la construcción de algunos números reales, las razones trigonométricas, el teorema del seno y del coseno y algunos resultados de la teoría de números.

Esta manera como se aborda el estudio del Teorema de Pitágoras permite una interdisciplinariedad dentro del área, no solo con la geometría sino con la aritmética, el álgebra, la trigonometría y los sistemas de medida. Por ejemplo, en la aritmética se estudian algunos aspectos de los números reales, en particular como construir algunos de ellos y como ubicarlos en la recta numérica y algunos resultados relacionados con la teoría de números como el Teorema de Fermat. En el álgebra, se estudian entre otros, ecuaciones lineales y cuadráticas y construcción de ternas pitagóricas que finalmente corresponden a expresiones algebraicas. En la trigonometría, se trabajan las relaciones trigonométricas y los teoremas del seno y el coseno.

En el cuarto capítulo se muestran algunas conclusiones y recomendaciones para otros profesores que quieran aplicar los talleres de esta propuesta y la manera cómo se podrían enriquecer los mismos.

1. Aspectos históricos y epistemológicos

1.1 Aspectos Históricos

Como veremos a continuación, las civilizaciones antiguas se dejaron guiar por la intuición y por su imaginación, así lograron usar resultados del Teorema de Pitágoras que fueron probados a partir de la experiencia. El inconveniente de esto es que la experiencia está influenciada por los sentidos. Y en el campo de las matemáticas esto no funciona como una demostración, justamente porque pueden ser casos particulares y por esto Pitágoras y su escuela se vio en la necesidad de hacer una demostración para que el Teorema fuera válido.

En esta parte se mostrará la visión del Teorema de Pitágoras que tenían los egipcios, los babilónicos, los chinos y los hindúes. Lo desarrollado por estas civilizaciones fue anterior a la formalización y a la demostración que se le atribuye a la escuela Pitagórica, razón por la cual el teorema recibe su nombre.

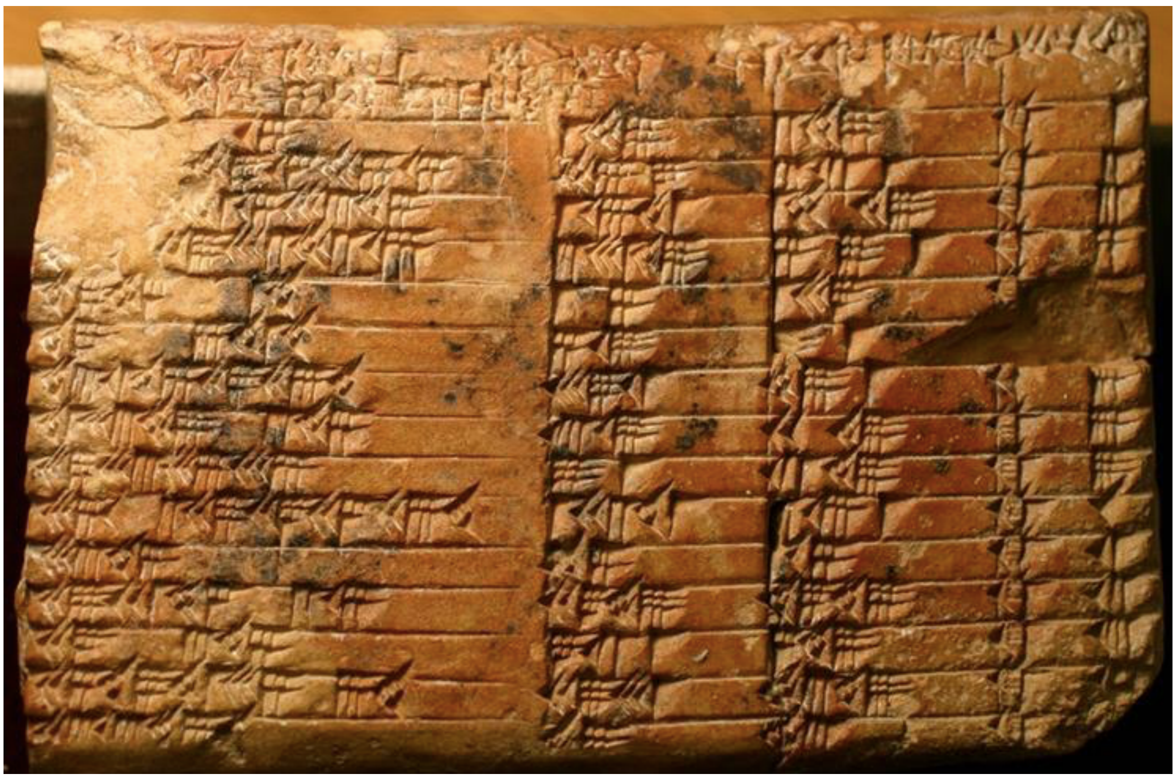
Es de anotar que este capítulo toma como base las referencias Boyer [4], Kline [10] y González [7].

1.1.1 Los babilonios y números pitagóricos

Como es sabido, las civilizaciones que se ubicaron entre el río Tigris y Éufrates que se conocen como babilonias, tuvieron un gran desarrollo en las matemáticas. Esto quedó consignado en las tablillas cuneiformes que se han encontrado (hay más de medio millón y más de 50000 tienen temas de matemáticas). Se tienen más registros de los avances de los babilonios que de los egipcios debido a que estas tablillas han resistido por más años debido a su material, comparadas con los papiros egipcios.

Los avances logrados por los babilonios incluyen la numeración posicional, las fracciones sexagesimales, operaciones fundamentales, problemas algebraicos, ecuaciones cuadráticas y cúbicas, y los que importan en este trabajo, ternas pitagóricas y áreas de polígonos. Los avances en las ternas pitagóricas quedaron representados en la tablilla PLIMPTON 322 (aprox. 1900-1600 a.C.) que se conserva en la Universidad de Columbia. En esta tablilla se ven cuatro columnas y 15 filas, como se ve en la Figura 2-1:

Figura 1-1: Plimpton 322



Nombre de la fuente: tomada de https://es.hdhod.com/Tablilla-de-3-700-anos-podria-ser-la-tabla-trigonometrica-mas-antigua_a25934.html

Los números en la última columna son la numeración de cada renglón, y los de las tres primeras columnas al parecer representan los catetos y la hipotenusa de triángulos rectángulos. A continuación, se muestran los valores que se han obtenido de la tablilla (algunos de la columna unos no se entendían, pero se han deducido las fórmulas con las que se obtuvieron los números y así se tiene la información completa de la tablilla) (González, 2008).

Figura 1-2: Triángulo rectángulo

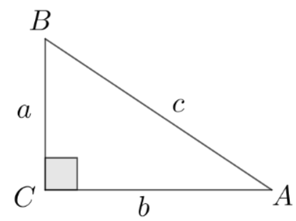


Tabla 1-1: Valores de la PLIMPTON 322

$(c/a)^2$	Sexagesimal a b			Decimal	
1;59,0,15	1,59	2,49	1	119	169
1;56,56,58,14,50,6,15	56,7	1,20,25	2	3367	4825
1;55,7,41,15,33,45	1,16,41	1,50,49	3	4601	6649
1;53,10,29,32,52,16	3,31,49	5,9,1	4	12709	18541
1;48,54,1,40	1,5	1,37	5	65	97
1;47,6,41,40	5,19	8,1	6	319	481
1;43,11,56,28,26,40	38,11	59,1	7	2291	3541
1;41,33,59,3,45	13,19	20,49	8	799	1249
1;38,33,36,36	8,1	12,49	9	481	769
1;35,10,2,28,27,24,26,40	1,22,41	2,16,1	10	4961	8161
1;33,45	45,0	1,15,0	11	45	75
1;29,21,54,2,15	27,59	48,49	12	1679	2929
1;27,0,3,45	2,41	4,49	13	161	289
1;25,48,51,35,6,40	29,31	53,49	14	1771	3229
1;23,13,46,40	56	1,46	15	56	106

En la tabla 1-1 los valores de la segunda y la tercera columna representan los valores de c y de a del dibujo. En esta tablilla no sólo se ven las ternas pitagóricas, sino que también se puede ver una naciente trigonometría, la cual va ordenando los valores de la primera columna de acuerdo a la razón c^2/a^2 , valores que coinciden con la $sec^2 B$. El primer valor se acerca al resultado de $sec^2 45$ y el último correspondería a $sec^2 31$. Como la primera parte de la tablilla está deteriorada por la fractura, no se sabe con certeza si esos valores sí son las $sec^2 B$. Algunos afirman que también podrían ser los valores de a^2/b^2 que equivalen a $tg^2 A$. No se puede saber con certeza que significa esa primera columna, lo que sí se puede saber es que alcanzaban valores con mucha exactitud, ya que algunos valores aparecen hasta con 8 cifras sexagesimales que al convertirse al sistema decimal son 14 cifras decimales.

Estos números los construyeron ellos tomando enteros (m, n) cuyos únicos divisores primos fueran 2,3 y 5, que cumplieran las siguientes condiciones: $m>n$, $b= 2mn$, $a=m^2-n^2$ y $c= m^2 + n^2$, los valores de m son menores que 60 y los de n cumplen que $1<\frac{m}{n}< 1+\sqrt{2}$. Con lo anterior los babilonios construyeron las 38 parejas de números *m y n* que forman las 38 ternas pitagóricas, en la tablilla aparecen las primeras 15. (González, 2008)

1.1.2 Egipto y las ternas pitagóricas

En los papiros más reconocidos del antiguo Egipto no hay menciones directas al Teorema de Pitágoras, sin embargo, es sabido que los agrimensores egipcios usaban el "triángulo de Isis" o "escuadra del carpintero" que tenía un valor sagrado, ya que en este triángulo sus catetos medían 3 y 4 y la hipotenusa medía 5, cada número representaba un dios, el 3 representaba a Osiris, el 4 a Isis y el 5 a Horus, como lo menciona Plutarco en sobre Isis y Osiris, VIII *"Los egipcios se imaginaban el mundo la forma del más bello de los triángulos. Este triángulo, símbolo de la fecundidad, tiene su lado vertical compuesto de tres, la base de cuatro y la hipotenusa de cinco partes. El lado vertical simbolizaba al macho, la base a la hembra, y la hipotenusa a la primogenitura de los dos".* (González, 2008) Este triángulo era usado para recuperar los linderos durante el limo fértil.

Para que los tensadores de cuerdas pudieran usar este triángulo, probablemente se anudaban las cuerdas cada cierta distancia, de manera que uno de los lados del triángulo tuviera tres nudos, otro cuatro y la diagonal 5 nudos. Luego de establecerse esto, los nudos de cada triángulo se ubicaban a la misma distancia para "unificar" las medidas con las que trabajarían los agrimensores.

En las pirámides, salvo en la de Keops, los egipcios usaron este triángulo en su construcción. Crearon progresiones aritméticas de estos valores, que formaban triángulos semejantes al triángulo de Isis. En un papiro encontrado en Kahun de la dinastía XII nombran explícitamente cuatro ternas pitagóricas que cumplen la relación. (González, 2008)

- $1^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \left(1\,\frac{1}{4}\right)^2$
- $6^2 + 8^2 = 10^2$
- $2^2 + \left(1\,\frac{1}{2}\right)^2 = \left(2\,\frac{1}{2}\right)^2$
- $16^2 + 12^2 = 20^2$

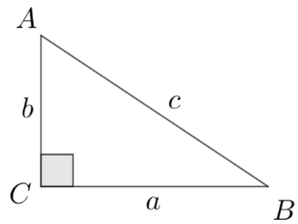
Los avances de los egipcios más notables en las matemáticas, fueron en el campo de la aritmética, trabajaban con números muy grandes y con fracciones unitarias, las cuales se escribían con un óvalo encima del número. Las fracciones que no eran unitarias las descomponían como suma de otras fracciones que si fueran unitarias. Es así como pudieron trabajar con las fracciones que componían las ternas mostradas anteriormente.

1.1.3 La India y los triángulos en sus altares

En la India se desarrollaron conocimientos geométricos y aritméticos del Teorema de Pitágoras. Lo anterior se llevó a cabo entre el siglo VIII-II a.C. en la construcción de los altares. Los hindúes desarrollaron algo llamado "manual de las reglas de las cuerdas" o más conocido como "Sulvasutras", *"sulva*" es el término que se utilizaba para nombrar las cuerdas con las que se medía y *"sutra"* es el nombre del libro en donde estaban las instrucciones o reglas de un determinado ritual o una ciencia. Al igual que los egipcios tenían personas encargadas de "tensar las cuerdas". En este manual enseñaban como se debían construir los altares en cuanto a su forma y tamaño.

Dentro de los Sulvasutras de mayor importancia para el tema tratado en este trabajo, se encuentran los escritos por Baudhayana y Apastabama que datan del siglo V a.C. En estos tratados no sólo hablan acerca del uso de las cuerdas para medir, sino que también muestran que se pueden trazar perpendiculares gracias a las siguientes ternas pitagóricas 3,4,5; 5,12,13; 8,15,16; 7,24,25. Al igual que los egipcios, los hindúes tenían una terna más importante, en este caso esta recibía el nombre de "Triángulo indio", esta terna era la de 5,12 y 13. Pero a pesar de que esa era su terna más importante la que más usaban era una que era múltiplo de esta que es la de 15,36 y 39. Sin embargo, estas ternas se pueden construir a partir de las reglas babilónicas, entonces no se puede descartar la influencia mesopotámica en los Sulvasutras.

Figura 1-3: Triángulo rectángulo



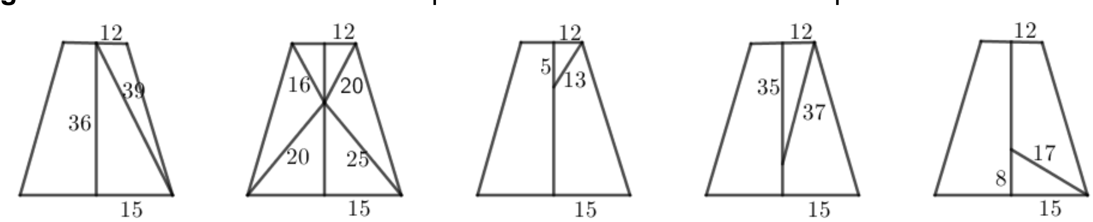
Además de trabajar con estas ternas los hindúes las clasificaron de acuerdo a la diferencia entre el valor de la hipotenusa “c” y su cateto vertical o altura “b” de la siguiente forma: (González, 2008).

Tabla 1-2: Clasificación de las ternas según los hindúes

$c-b=1$			$c-b=2$			$c-b=3$		
a	**b**	**c**	**a**	**b**	**c**	**a**	**b**	**c**
3	4	5	8	15	17	15	36	39
5	12	13	12	35	37			
7	24	25						

Por su parte Apastabama sabía que el cuadrado construido sobre la hipotenusa de un triángulo era igual a la suma de las cuadrados construidos sobre los catetos (una forma primitiva del teorema de Pitágoras, nada nos garantiza que esto lo descubriera él o fuera influencia de Mesopotamia), además de esto en su libro muestra un regla para construir un cuadrado de área equivalente a la de un rectángulo y muestra cómo se deben usar las ternas pitagóricas en la construcción de los altares, como se mostrará a continuación:

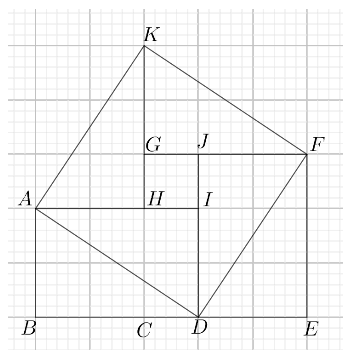
Figura 1-4: Trazas de altares trapezoidales del Sulvasutra de Apastabama



1.1.4 China y el Teorema de Pitágoras

De los tratados chinos que se han encontrado dos hablan acerca de temas matemáticos, estos son el "*Chou Pei Suan Ching*" y el "*Chui Chang Suang Shu*", el primero es de aproximadamente 300 a.C. y el segundo de 250 a.C. En estos tratados se habla acerca de aspectos primitivos del Teorema de Pitágoras. Los aspectos que se tratan son las leyes para la construcción de ternas pitagóricas y resultados numéricos concretos. Luego en el siglo III d.C. Zho Shuang y Liu Hui ampliaron y desarrollaron estos tratados.

Figura 1-5: Diagrama de la hipotenusa del tratado Chou Pei Sua Ching

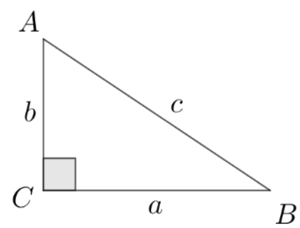


En el Chou Pei se muestra un "diagrama de la hipotenusa". En esta figura podemos ver que el hexágono AHGFEB esté compuesto por dos cuadrados, uno es el AHCB y el otro es el CEFG. Estos cuadrados tienen por lados los catetos del triángulo rectángulo y esta área es equivalente al área del cuadrado ADFK sobre la hipotenusa de los triángulos. Así se obtiene una prueba del teorema. En el Chou Pei describe la figura así: "*En cada semirectángulo de anchura 3 y longitud 4, la diagonal debe valer 5, y si se resta del cuadrado total del área 49 los cuatro semirectángulos exteriores, que suman área 24, el resto es un cuadrado de área 25"*. (González, 2008)

Por su parte, en el Chui Suang de los 246 problemas que se plantean, 24 tienen que ver con triángulos rectángulos los cuales para resolverlos se debe aplicar el Teorema de Pitágoras, el más famoso de los problemas es el que habla acerca de un bambú roto, en el que en su solución se combina el Teorema de Pitágoras con la solución de ecuaciones de segundo grado, el problema dice así: "*Hay un bambú de diez pies de altura, que se ha roto de tal manera que su extremo superior se apoya en el suelo a una distancia de tres* *pies de la base. Se pide calcular a que altura se ha producido la rotura*". (González, 2008)

Los chinos al igual que los babilonios crearon ternas pitagóricas, como se mencionó anteriormente, crearon leyes generales para encontrar dichas ternas, además construyeron otras ternas proporcionales a las ya construidas.

Figura 1-6: Triángulo rectángulo



La forma general para crear estas ternas se necesitan dos naturales *m y n* tales que: $a = mn,\ b = \frac{1}{2}(m^2 - n^2)$ y $c = \frac{1}{2}(m^2 + n^2)$. A continuación, se mostrarán algunas de las ternas que construyeron los chinos con las leyes generales mencionadas. (Boyer, 1986)

Tabla 1-3: Ternas pitagóricas de los chinos

m	**n**	**a**	**b**	**c**
3	1	3	4	5
5	1	5	12	13
5	3	15	8	17
7	1	7	24	25
7	3	21	20	29

Se puede observar algo particular en la tabla anterior, los valores para m y n no consideran números pares, a pesar que si se siguen las reglas también se pueden construir ternas pitagóricas. La razón por la que trabajaron solo con impares no se conoce, probablemente pensaron que si se cumplía con los impares inmediatamente se cumpliría con los pares, mientras que si se cumplía con los pares no necesariamente se cumpliría con los impares.

1.1.5 Platón y sus ternas pitagóricas

Platón en el Menón habla acerca de los triángulos rectángulo isósceles, allí a partir de preguntas de Sócrates a un esclavo (quien responde dando un desarrollo geométrico) logra inducirlo a un razonamiento totalmente geométrico. Esta charla se da cuando se toca el tema de la duplicación del cuadrado que conduce al problema de la duplicación del cubo.

Platón concluye con unas leyes para construir ternas pitagóricas en las que la diferencia de la hipotenusa y el cateto vertical o altura es igual a dos. Las leyes de construcción son las siguientes: $a = 2m, b = m^2 - 1 \; y \; c = m^2 + 1$, con m un natural. La idea de estas leyes la pudo tomar Platón de los babilonios y de los pitagóricos mismos. (Kline, 1994)

Figura 1-7: Triángulo rectángulo

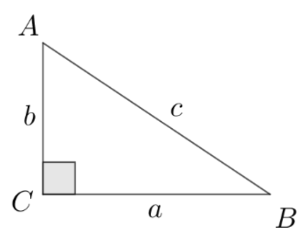


Tabla 1-4: Ternas pitagóricas de Platón

m	*a*	*B*	*c*
2	4	3	5
3	6	8	10
4	8	15	17
5	10	24	26
6	12	35	37

Las ternas de los pitagóricos eran las siguientes: $a = m, b = \frac{m^2-1}{2} \; y \; c = \frac{m^2+1}{2}$ con m un número impar, al ser m impar garantizaban que la fracción de b y c fueran enteras.

1.1.6 Euclides y la demostración del Teorema de Pitágoras

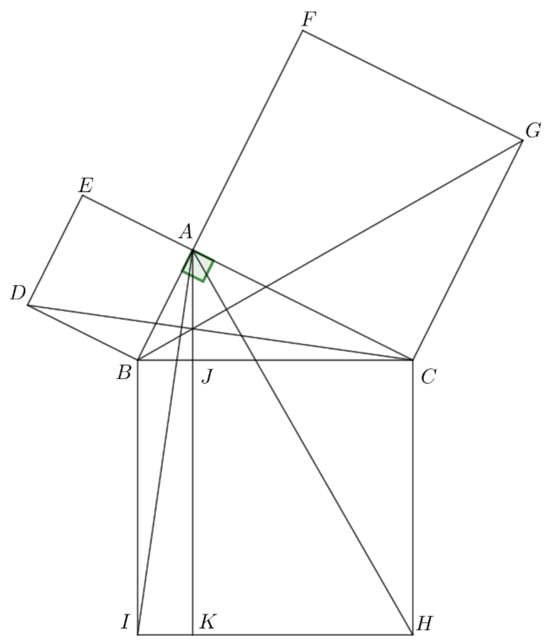
Por su parte Euclides, quien escribió 13 libros, los cuatro primeros hablan de geometría plana, en el libro V y VI habla acerca de la teoría de las proporciones, del VII-IX habla de aritmética, en el X habla acerca de los números irracionales, en el XI trata el tema de la descomposición en factores primos y en los últimos dos habla acerca de óptica, astronomía y mecánica. Pero para esta parte nos interesa los temas que trato en su libro I de "Los Elementos" en el cual termina con el Teorema de Pitágoras y su recíproco, desarrollando la demostración con elementos sencillos de la geometría como lo son:

- Construcción de cuadrados sobre elementos. (I.46)
- Ángulos adyacentes que sumen dos rectos. (I.14)
- El primer teorema de congruencia de triángulos. (I.4)
- La relación de triángulos y paralelogramos que tienen la misma base y están situados en las mismas paralelas, para esto se utilizan las siguientes proposiciones "Los paralelogramos que tienen la misma base y están situados entre las mismas paralelas tiene la misma área" (Elementos, I.36). y "si un paralelogramo tiene la misma base que un triángulo y están situados entre las mismas paralelas el área del paralelogramo es doble de la del triángulo" (Elementos, I.41).

Y de la forma más elegante posible arregla el problema que presentaba la demostración de Pitágoras evitando trabajar con la teoría de proporciones que planteó Pitágoras que no contemplaba las magnitudes inconmensurables.

Euclides enuncia el teorema así: "*En los triángulos rectángulos el cuadrado del lado que subtiende el ángulo recto es equivalente a los cuadrados de los lados que comprenden el ángulo recto*" a continuación se mostrará la demostración presentada en la proposición 47 de su libro I. (Euclides, 1956)

Figura 1-8: Demostración de Euclides



Sea $\Delta ABC,$ el triángulo rectángulo cuyo ángulo recto es $\angle BAC$. Se quiere probar que el cuadrado sobre BC es igual a los cuadrados sobre $BA\ y\ AC$.

Sea el cuadrado $BIHC$ sobre BC y sobre BA, AC los cuadrados $BDEA, CAFG$ (I. 46) se traza por A la recta AK paralela a $BI\ o\ CH$. Ahora se traza A$I\ y\ DC$.

Por definición $\angle BAC\ y\ \angle BAE$ son rectos, y las rectas $AC\ y\ AE$ están en lados distintos de la recta BA, esto hace que se formen ángulos adyacentes iguales, es decir ángulos rectos. Luego $AC\ y\ AE$ son una misma línea, de la misma forma BA y AF son una misma recta y $\angle IBC = \angle DBA$ estos son rectos. Así $IB = BC$ y $DB = BA$, los dos lados AB, BI son iguales a los dos lados DB, BC respectivamente, y el $\angle ABI = \angle DBC$. Además, la base $AI = DC$ y $\Delta ABD = \Delta FBC$ (I.4). Ahora el cuadrilátero $BIKJ$ es el doble del triángulo $ABI,$ porque tiene la misma base BI y están sobre las mismas paralelas BI, AK.

Y el cuadrado $EDBA$ es el doble del triángulo $DBC,$ porque ellos tienen la misma base BC y estan sobre las mismas paralelas DB, EC.

El cuadrilátero $BIKJ$ es también igual al cuadrado $EDBA$. De manera similar si se dibuja $AH\ y\ BG$ podemos probar que el cuadrilátero $JCHK$ es igual al cuadrado $ACGF$; además todo el cuadrado $BIHC$ es igual a los cuadriláteros $BIKJ, JCHK$. Entonces, el cuadrado sobre el lado BCes igual a los cuadrados sobre los lados BA, AC.

Euclides no se conformó solo con probar el Teorema, sino que además se aventuró a formular un recíproco que también probó (la proposición 48) que dice: *"Si en un triángulo el cuadrado construido sobre uno de los lados es igual a los cuadrados construidos sobre los restantes lados del triángulo, el ángulo comprendido por esos lados restantes del triángulo es recto".* (Euclides, 1956)

Para probar lo anterior Euclides, considera un triángulo ABC. Construye un cuadrado sobre el lado BC que es igual a los cuadrados sobre $BA\ y\ AC$. Luego traza el segmento DA que es igual a BA y es perpendicular a AC, el cuadrado sobre DA es igual al cuadrado sobre BA. El cuadrado sobre AC es el mismo para los dos triángulos. Pero, el cuadrado sobre DC es igual al cuadrado sobre $DA\ y\ AC,$ porque el ángulo DAC es recto. Entonces, el cuadrado sobre BC es igual a los cuadrados sobre $BA\ y\ AC$ por hipótesis, y el cuadrado sobre BC es igual al cuadrado sobre DC, luego $DC = BC$, entonces los triángulos son iguales, así $\angle DAC = \angle BAC$ y el $\angle BAC$ es recto.

1.1.7 Hilbert y su aporte a la geometría

A finales del siglo XIX, después de que las geometrías no euclidianas empezaron a ser reconocidas, se presentó el problema de darle una construcción lógica a la geometría euclidiana. Y como una solución para este problema apareció el libro de David Hilbert "*Fundamentos de la geometría*" (1899). En este libro Hilbert empieza hablando de unos términos no definidos que son: *punto, recta y plano.* Y muestra cinco relaciones indefinidas que son: *estar en, estar entre, ser congruente, ser paralelo y ser continuo.* Estos términos y relaciones indefinidas quedan definidos implícitamente por los axiomas.

Hilbert plantea un conjunto de 21 axiomas, los primeros ocho son de pertenencia (dentro de estos están los cinco postulados de Euclides) estos dan información acerca de la construcción de rectas y planos, las condiciones de existencia y las relaciones entre los distintos elementos geométricos. Siguen 4 axiomas que son de orden y con ellos se determinan las posiciones de los puntos en una recta, la existencia de punto interiores y exteriores en un segmento y la prolongación de una recta indefinidamente. Siguen cinco axiomas de congruencia los cuales establecen la igualdad entre segmentos, ángulos, rectas y polígonos. Dos de los axiomas son de continuidad y con estos buscaba hablar acerca de la medida de los segmentos, de los ángulos y las áreas de las figuras. Por último, está el axioma de las paralelas que es equivalente al postulado de Euclides, con este se da origen a la teoría de semejanza de las figuras. Al separar los axiomas de esta manera garantiza la independencia entre ellos.

Hilbert formalizó la geometría empezando por conceptos y relaciones primitivas y luego fue construyendo sobre estos. Prueba proposiciones usando otras proposiciones anteriores y así va mostrando el sentido que tiene organizarlo de esta forma. Los conceptos y relaciones primitivas toman sentido geométrico a partir de los axiomas y sus respectivas consecuencias. (Guerrero, 2006)

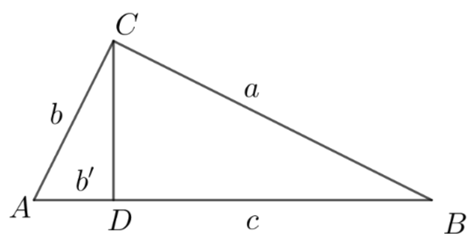
Hilbert antes de llegar a la demostración del teorema de Pitágoras ha trabajado con los axiomas de incidencia, orden, congruencia y todas las consecuencias que estos llevan. Define todos los elementos geométricos que va a usar, habla acerca de los criterios de congruencia de ángulos, segmentos (la aritmetización de los mismos) y figuras. Enuncia el postulado del paralelismo, con este conlleva a la semejanza de los triángulos, los polígonos semejantes, habla de la circunferencia y define todos los elementos de la circunferencia y una geometría que ella conlleva. Plantea la teoría de proporciones y habla acerca de las áreas de los polígonos y de cuando son iguales hasta llegar a la demostración del teorema y de su recíproco.

Todo esto se hace en ese orden simplemente porque Hilbert no quería que en algún momento la geometría que él estaba axiomatizando pudiera llegar a alguna contradicción.

A continuación, se muestra la demostración hecha por Hilbert del Teorema y de su recíproco. Para la demostración del teorema se usa un Teorema demostrado anteriormente que es el teorema de la proporcionalidad del triángulo rectángulo que dice: "*Si en un triángulo rectángulo se traza la altura correspondiente a la hipotenusa, entonces:*

1. *Los dos nuevos triángulos que resultan, son semejantes entre si y semejantes al triángulo original.*
2. *La altura es media proporcional entre los segmentos que ella determina sobre la hipotenusa.*
3. *Cada cateto es media proporcional entre la hipotenusa y la proyección del cateto sobre la hipotenusa."*

Figura 1-9: Demostración de Hilbert.



*U*sando estos hechos la demostración queda así: $CB^2 = DB \cdot AB \; y \; AC^2 = AD \cdot AB$. Si se suman las dos igualdades obtenemos $CB^2 + AC^2 = DB \cdot AB + AD \cdot AB = AB(DB + AD) = AB \cdot AB = AB^2$. Una prueba similar a la que hace Pitágoras.

Para demostrar el recíproco se usan axiomas referentes a la construcción y los axiomas de congruencia, la demostración se sigue como la de Euclides.

1.2 Aspectos Epistemológicos

Con los griegos las matemáticas encontraron su dimensión universal y mucho más abstracta, hasta ese momento lo que se había desarrollado de las matemáticas lo habían recibido de los babilonios y los egipcios. Ese fue el caso de Thales y Pitágoras quienes a raíz de sus viajes pudieron obtener esos conocimientos de primera mano. A ellos dos se les atribuye el inicio del desarrollo de las matemáticas como las conocemos hoy. (Prada, 2011)

Por un lado, a Thales se le atribuye el título de primer matemático, ya que organizó un sistema deductivo en la geometría. Además, planteó demostraciones de algunos teoremas. Por otra parte, Pitágoras, quién fundó la escuela que lleva su nombre, tuvo una vida rodeada de misterio. Él desarrolló un misticismo y casi adoración por los números, en su escuela ubicada en Crotona, tenía como "*Su principal objetivo era la purificación del alma o catarsis, cultivando el arte de la música y la ciencia de las matemáticas, siguiendo el camino de la filosofía, palabra que desde entonces ha significado amor a la sabiduría; tenían también un gran sentido de fraternidad y cultivo de la amistad."* (Prada, 2011)

La escuela pitagórica buscó siempre un mundo inteligible y en su búsqueda se dio cuenta que el número era lo único de este mundo que podía acercarlos al conocimiento. Por eso se cree que el lema de la escuela fue "*todo es número*". En teoría esto motivó a la escuela a hacer una demostración de un resultado que pudo ser tomado de los babilonios o de los egipcios, que fue el que hoy conocemos como Teorema de Pitágoras.

Pero la idea que tenían los pitagóricos de número era la idea de un número natural, de hecho, su idea está ligada con la idead de conmensurabilidad, estos e refiere a que existía una medida común a dos segmentos distintos. Este segmento común definiría una razón entre los dos segmentos, que luego se podría expresar como una proporción.

Es por esta concepción que ocurrió lo que Paul Tannery llamó como "*El escándalo de la matemática pitagórica*", (Jiménez, 2006) ya que al intentar aplicar el teorema sobre un triángulo rectángulo isósceles se dieron cuenta que el segmento obtenido (hipotenusa) y un cateto eran segmentos inconmensurables.

> *"A la distancia resulta difícil valorar la magnitud de un descubrimiento de esta naturaleza, pero cuando una visión epistemológica —e incluso ontológica— se sustenta sobre un supuesto determinado, la ruptura con ese supuesto significa en consecuencia un cambio de visión, vale decir, una revolución del pensamiento"* (Jiménez, 2006)

Este resultado generó una revolución en el pensamiento ya que para los pitagóricos la matemática era una ciencia suprema. Su creador había sido capaz de matematizar hasta la música, creando lo que en música se conoce como octava, quinta y cuarta, a partir de razones. Todo su mundo era matemático y este descubrimiento de cantidades inconmensurables se salía de su mundo matematizado.

2 Aspectos Disciplinares

Para la parte disciplinar se toma como base el libro *Geometría Moderna*. El texto es un ejemplo que trata de imitar el trabajo de “Euclides”, esto es, parte de términos no definidos, punto, recta y plano, se formulan algunos postulados y luego se prueban algunos teoremas. Ahora bien, una gran diferencia con los textos antiguos y por ende al de Euclides es que el texto pone de presente que admitimos el conocimiento de la teoría de conjuntos y de los números reales; dos grandes teorías que aparecieron a mediados del siglo XIX. Para los intereses de un curso básico, el texto lo consideramos pertinente, pues a la vez que da el ejemplo de cómo se desarrolla un sistema axiomático, llega de una manera rápida a los conceptos que se requieren abordar en los niveles de educación que nos ocupa, pues al tener la noción de “medida” desde el comienzo, dado por los números reales, se llega a la medida de ángulos, segmentos, áreas, congruencia y semejanza.

2.1 Definiciones básicas

Para empezar, se retoma los términos fundamentales no definidos en Moise que son: punto, recta y plano; “*las rectas y los planos son conjuntos de puntos*”. (Moise, 1986). Para el caso que nos ocupa, creemos pertinente en este trabajo omitir la teoría básica. Así que partimos de triángulos.

Seguimos la notación de Moise [13], así el segmento $\overline{AB}$ es el conjunto de puntos que están entre $A\,y\,B$ y la medida $\overline{AB}$ se denota como AB. Si dos segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ cumplen que $AB = CD$, entonces se dice que son congruentes y se nota así $\overline{AB} \cong \overline{CD}$. Si dos rayos $\overrightarrow{AB}\ y\ \overrightarrow{AC}$ forman un ángulo, este ángulo se puede nombrar de diferentes maneras, entre otros $\angle BAC\ o\ \angle CAB$

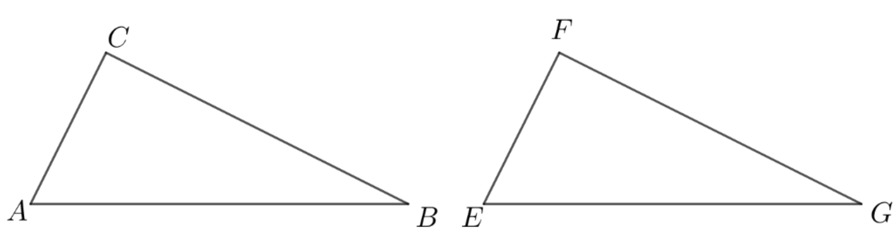
Si $A, B\ y\ C$ son tres puntos no alineados, entonces la unión de los segmentos $\overline{AB}, \overline{BC}\ y\ \overline{AC}$ se llama triángulo y se nota ΔABC. Los segmentos antes mencionados reciben el nombre de lados del triángulo y los puntos $A, B\ y\ C$ son vértices. Además, en esta figura se determinan tres ángulos: $\angle ABC, \angle ACB\ y\ \angle BAC$, que también se pueden nombrar como $\angle A, \angle B\ y\ \angle C$. Al respecto, recordemos que la suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo son 180º.

Los triángulos se pueden clasificar de acuerdo a sus lados. Un triángulo con tres lados de igual medida se llama equilátero, uno con dos lados iguales se llama isósceles y uno con todos sus lados de diferente medida se llama escaleno. Además se pueden clasificar por la medida de sus ángulos. Un triángulo acutángulo es aquel que todos sus ángulos son agudos, uno rectángulo es aquel que tiene un ángulo recto y uno obtusángulo es el que tiene un ángulo obtuso.

2.2 Congruencia de triángulos

Cuando se habla de que dos triángulos son congruentes se entiende que se refiere a que los triángulos tienen el mismo tamaño y la misma forma, es decir, se puede sobreponer uno sobre el otro y no se notará la diferencia, por el contrario, parecerá que uno es copia del otro.

Figura 2-1: Triángulos Congruentes



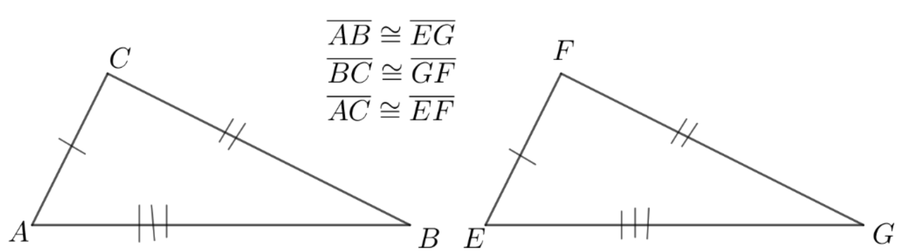
Consideremos la correspondencia $ABC \leftrightarrow EGF$ entre los vértices de los triángulos de la figura 2-1. Por convención y por manejo del texto guía significa que existe una correspondecnia entre los lados de la siguiente forma: $\overline{AB} \leftrightarrow \overline{EG}, \overline{AC} \leftrightarrow \overline{EF}\ y\ \overline{BC} \leftrightarrow \overline{GF}$, también se da una correspondencia entre los ángulos de los triángulos $\angle A \leftrightarrow \angle E, \angle B \leftrightarrow \angle G\ y\ \angle C \leftrightarrow \angle F$. (Moise, 1986)

Si dos triángulos $\Delta ABC\ y\ \Delta EGF$ cumplen la siguiente correspondencia $ABC \leftrightarrow EGF$ de tal forma que los ángulos y los lados correspondientes son congruentes, es decir, $\angle A \cong \angle E, \angle B \cong \angle G\ y\ \angle C \cong \angle F$; $\overline{AB} \cong \overline{EG}, \overline{BC} \cong \overline{FG}\ y\ \overline{AC} \cong \overline{EF}.$ Entonces se dice que los triángulos son congruentes y se nota así: $\Delta ABC \cong \Delta EGF$.

Nótese que para mostrar que dos triángulos son congruentes se deben verificar que las seis partes de uno de ellos son congruentes con las seis partes correspondientes del otro. Ahora bien, siguiendo el texto, se admite como postulado que sabiendo que dos lados y el ángulo comprendido entre ellos de un triángulo son congruentes con los lados y el ángulo correspondientes de otro triángulo son congruentes, entonces los triángulos son congruentes, a este postulado se le denomina postulado de congruencia LAL. Tomando como base este se puede probar otros postulados denominados ALA y LLL, estos postulados se mostrarán a continuación:

- **Postulado LLL (lado, lado, lado):** Dos triángulos son congruentes si sus tres lados son congruentes.

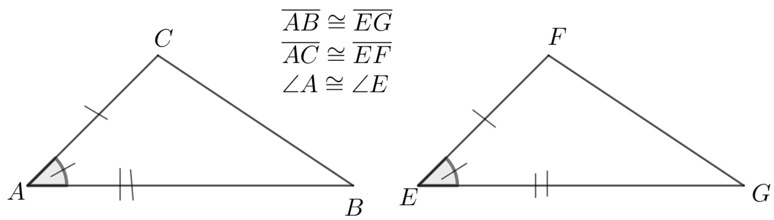
  Figura 2-2: Postulado LLL



.

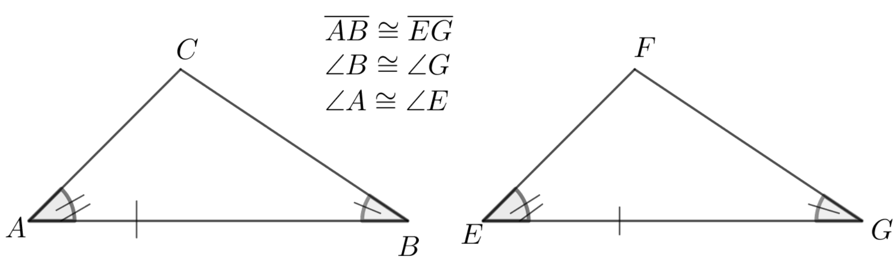
- **Postulado LAL (lado, ángulo, lado):** Dos triángulos son congruentes si tienen dos lados congruentes y el ángulo que se forma entre ellos también es congruente.

Figura 2-3: Postulado LAL



- **Postulado ALA (ángulo, lado, ángulo):** Dos triángulos son congruentes si tienen dos ángulos congruentes y el lado comprendido entre ellos también es congruente.

Figura 2-4: Postulado ALA

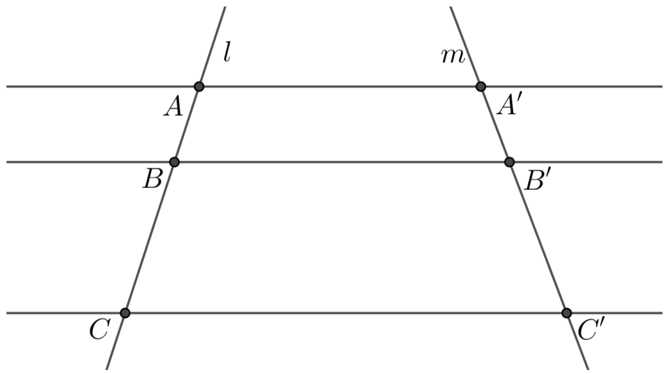


Antes de hablar de semejanza debemos hablar del concepto de razón y proporción. Una razón es el cociente entre dos magnitudes reales, la igualdad de dos razones se llama proporción.

2.3 Teorema de Thales

Thales de Mileto fue un matemático griego que trabajo con proporciones al que se le atribuye, que, con el uso de las proporciones, fue capaz de calcular la altura de las pirámides comparando el tamaño de su sombra con el de un poste del que se sabía su altura. A este matemático se le atribuye el siguiente teorema que es fundamental en el estudio de la semejanza de triángulos. (Este Teorema no está enunciado en el libro que se siguió para la parte disciplinar).

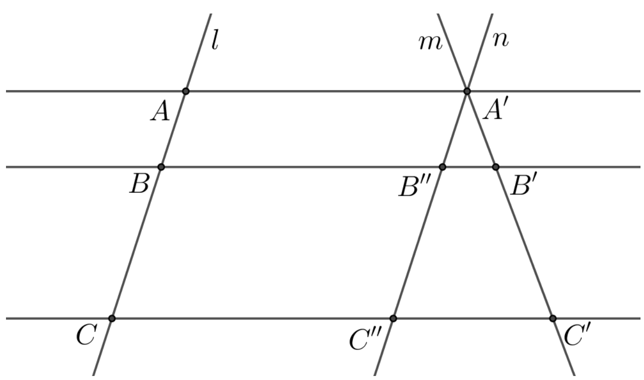
Figura 2-5: Teorema de Thales



Sean l y m dos rectas coplanarias, sean A, B y C puntos sobre l y sean A', B' y C' puntos sobre m. Thales que si $\overleftrightarrow{AA'} \parallel \overleftrightarrow{BB'} \parallel \overleftrightarrow{CC'}$, entonces $\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$.

Demostración: Sea n la recta paralela a l que pasa por A'. Dicha recta recta intersecta a la rectas $\overleftrightarrow{BB'}$ y $\overleftrightarrow{CC'}$ en los puntos B'' y C'' respectivamente.

Figura 2-6: Demostración Teorema de Thales



Las alturas de los triángulos $\Delta B''B'A'$ y $\Delta C''B'B''$ desde el vértice B' son iguales para los dos triángulos. Asi que la razón entre las áreas de los triángulos $\Delta B''B'A'$ y $\Delta C''B'B''$ es la razón entre sus bases esto es $\frac{A'B''}{B''C''}$. Análogamente la razón entre las áreas de los triángulos $\Delta B''B'A'$ y $\Delta C'B'B''$ es $\frac{A'B'}{B'C'}$. Ahora, los triángulos $\Delta C''B'B''$ y

$\Delta C'B'B''$ tienen la misma área considerando para ambos como base el segmento $\overline{B''B'}$. Por lo tanto, $\frac{A'B''}{B''C''} = \frac{A'B'}{B'C'}$.

Ahora, los cuadriláteros $BB''A'A$ y $CC''B''B$ son paralelogramos, de donde $AB = A'B''$ y $BC = B''C''$. Por lo tanto, $\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$.

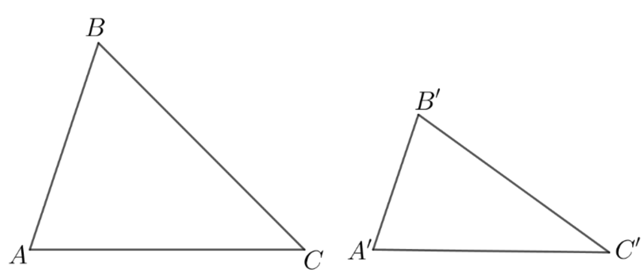
En este punto cabe anotar que la prueba de este teorema sigue las ideas de Moise [13], y que allí se constituye en las pruebas de los corolarios 1 y 2 de abajo, que serán útiles para la semejanza de triángulos.

- ***Corolario 1:*** Una recta paralela a uno de los lados de un triángulo que corte a los otros dos lados los divide en segmentos proporcionales. La prueba sigue la referencia Moise[13].
- ***Corolario 2:*** Una paralela a un lado de un triángulo determina un triángulo semejante al primero. (Bermúdez, 2011)

2.4 Semejanza de triángulos

Al hablar de semejanza de figuras, el concepto intuitivo que se tiene es que una figura es semejante a otra si una es reducción o ampliación de la primera. En el caso particular de los triángulos, dos triángulos son semejantes si sus ángulos son congruentes y si sus lados son proporcionales.

Figura 2-7: Semejanza de triángulos



La semejanza de dos triángulos se denota con el símbolo $\sim$, entonces $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$, esto no sólo significa que los triángulos son semejantes sino que al igual que en la congruencia de triángulos se cumple una correspondencia particular que es $\Delta ABC \leftrightarrow \Delta A'B'C'$, esta correspondencia es una semejanza y cumple lo siguiente:

$$\angle A \cong \angle A', \angle B \cong \angle B' y \ \angle C \cong \angle C'$$

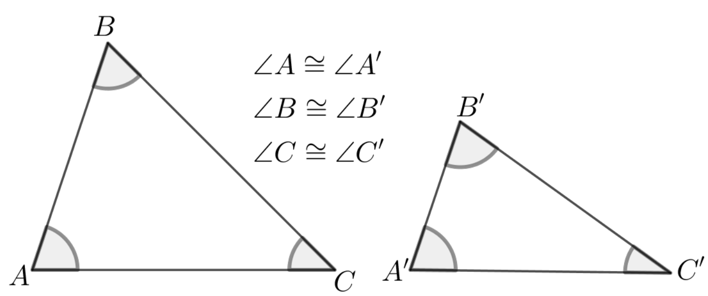
$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} = k$$

Nótese que al cumplirse que todas las proporciones son iguales a k podemos decir que efectivamente uno es una ampliación del otro o una reducción $AB = k.A'B'$, $AC = k.A'C' y \ BC = k.B'C'$.

Al igual que en el estudio de la congruencia existen criterios, que realmente en el texto guía son teoremas, que permiten determinar si dos triángulos son semejantes, sin necesidad de verificar todas las condiciones anteriores.

- **Teorema AAA (ángulo, ángulo):** Si dos triángulos $\Delta ABC \ y \ \Delta A'B'C'$ tienen todos sus ángulos correspondientes congruentes entonces los triángulos son semejantes.

Figura 2-8: Teorema AAA

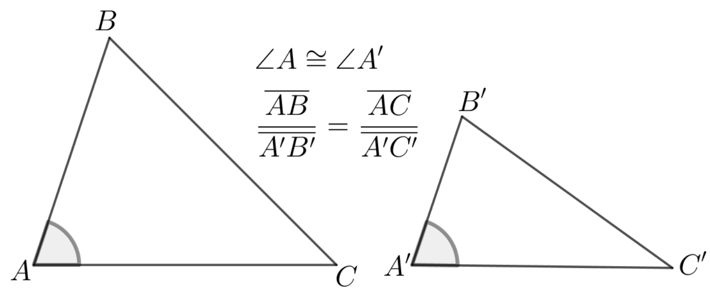


Demostración: Sea un punto D que este sobre $\overline{AB}$ de tal forma que $BD = B'A'$ y sea un punto F que este sobre $\overline{BC}$ de tal forma que $BF = B'C'$. Por el criterio de congruencia LAL el $\Delta DBF \cong \Delta A'B'C'$. Por lo tanto, $\angle A' \cong \angle F$ y como $\angle A' \cong \angle A$ entonces $\angle F \cong \angle A$, pero estos dos ángulos son correspondientes. Por lo que se concluye que $\overline{AC} \parallel \overline{DF}$. Y aplicando el Teorema de Thales se tiene que $\frac{BA}{BD} = \frac{BC}{BF}$ pero, como $BD = B\acute{A}'$ y $BF = B'C'$ se cumple que $\frac{BA}{B\acute{A}'} = \frac{BC}{B'C'}$. De manera análoga, se demuestra que $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$.

Nótese que para el enunciado basta considerar dos ángulos congruentes.

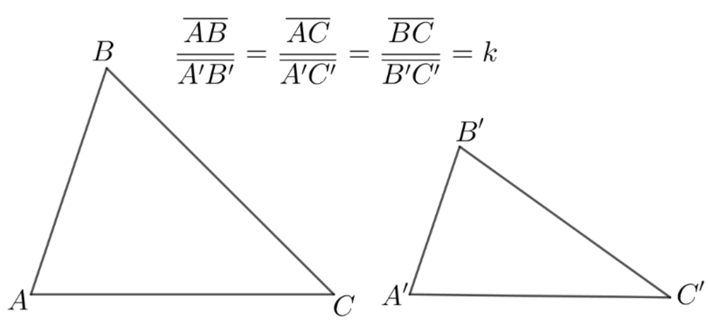
- **Teorema LAL (lado, ángulo, lado):** Dos triángulos son semejantes si dos pares de lados son proporcionales y el ángulo que se forma entre ellos es congruente.

Figura 2-9: Teorema LAL



- **Teorema LLL (lado, lado, lado):** Dos triángulos son semejantes si sus tres lados son proporcionales.

Figura 2-10: Teorema LLL



2.5 Áreas de figuras planas

Para empezar a hablar de figuras planas, primero definiremos una región triangular como la unión de un triángulo y su interior. Ahora bien, podemos definir una región poligonal como la unión de muchas regiones triangulares tales que dos de ellas se intersecan en un segmento de recta o en un punto. Un polígono es regular si es convexo, todos sus lados son congruentes y sus ángulos interiores son congruentes. Cabe anotar que algunas pruebas del teorema de Pitágoras usan las áreas de figuras planas.

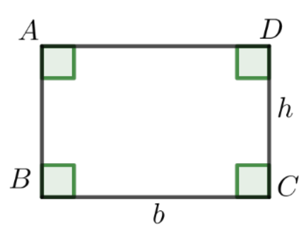
Calcular el área de una figura plana es compararla con un patrón de medida dado por una figura particular que en nuestro caso será el cuadrado. Para precisar un poco más este comentario, a continuación se enuncian los postulados del área que permiten calcular el área de algunos polígonos:

- *Postulado del área: A toda región poligonal le corresponde un único número real.*
- *Postulado de la congruencia: Si dos triángulos son congruentes, entonces sus regiones triangulares tienen la misma área.*
- *Postulado de la adición de áreas: Supongamos que tenemos una región que es la unión de dos regiones más pequeñas. Supongamos que estas regiones se intersecan en un número finito de puntos y segmentos. Entonces el área de la región más grande será la suma de las áreas de las regiones más pequeñas.*
- *Postulado de la unidad: El área de una región cuadrada es el cuadrado de la longitud de su lado.* (Moise, 1986).

Con base en estos postulados se calcula el área de algunas figuras planas conocidas, las cuales se mencionan a continuación.

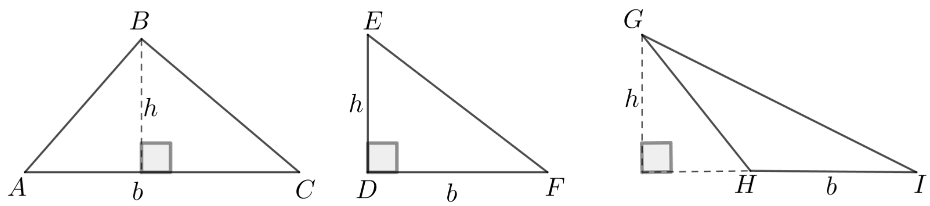
- **Área de un rectángulo:** El área de un rectángulo es el producto de su base y su altura correspondiente.

  Figura 2-11: Rectángulo



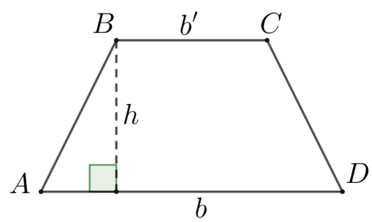
- **Área de un triángulo:** El área de un triángulo es la mitad del producto de cualquiera de sus bases por la altura correspondiente. En el caso particular de un triángulo rectángulo el área es la mitad el producto de sus catetos.

Figura 2-12: Triángulos



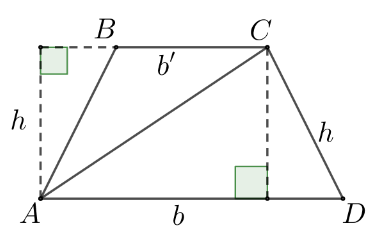
- **Área de un trapecio:** El área de un trapecio es la mitad del producto de la altura por la suma de sus bases.

Figura 2-13: Trapecio



Consideremos el trapecio $ABCD$ con $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ y altura h como lo muestra la figura 2-13. Se traza la diagonal $\overline{AC}$. En tal caso se determinan dos triángulos, ΔACB y ΔADC uno de base b y el otro de base b'. Cabe resaltar que los dos triángulos tienen la misma altura h.

Figura 2-14: Diagonal del trapecio

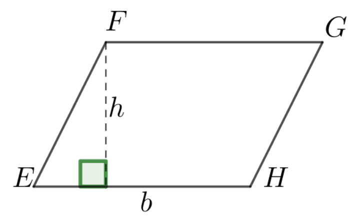


Por lo tanto el área del trapecio es $A = \frac{1}{2}hb + \frac{1}{2}hb' = \frac{1}{2}h(b + b')$.

Nótese que un paralelogramo es un trapecio, por lo tanto se tiene el siguiente resultado.

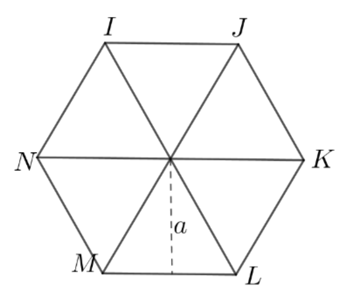
- **Área de un paralelogramo:** El área del paralelogramo es el producto de la base por su altura correspondiente.

Figura 2-15: Paralelogramo



- **Área de un polígono regular de n- lados**: Un polígono regular de n lados puede considerarse inscrito en una circunferencia. En tal caso se determinan n triángulos congruentes como lo ilustra la figura. En este contexto la altura de cada triángulo (sobre el lado del polígono), se denomina apotema. Así el área A del polígono corresponde al área de cada triángulo multiplicada por el número de triángulos. Así $A = \frac{l.a.n}{2}$ con l la medida del lado, a la apotema y n el número de lados del polígono.

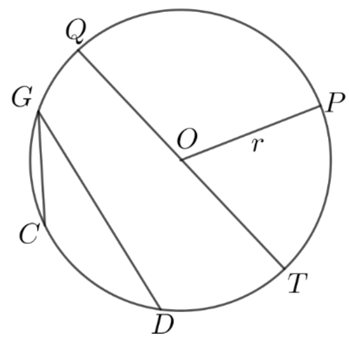
Figura 2-16: Polígono



2.6 La geometría del círculo

En nuestro caso, es necesario estudiar la geometría del círculo ya que se usa el teorema de Pitágoras en algunas pruebas, lo cual nos sirve de contexto en este trabajo, y recíprocamente se puede probar el teorema de Pitágoras haciendo uso de algunos resultados relacionados con la circunferencia, sirviendo así el teorema de Pitágoras como pretexto para estudiar dichos resultados. Advertimos que en esta sección no se estudiará toda la geometría del círculo, sólo algunos resultados necesarios para el desarrollo del trabajo.

Figura 2-17: Elementos de la circunferencia



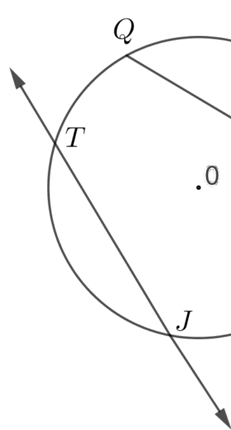
La circunferencia con centro en O y radio r se define como el conjunto de puntos que están a la distancia r de O. Una cuerda es un segmento que une dos puntos de la circunferencia, en la figura $\overline{CG}$ es una cuerda. Un radio es un segmento que une el centro con un punto de la circunferencia, en la figura $\overline{OP}$ es un radio. Un diámetro es una cuerda que pasa por el centro de la circunferencia, en la figura $\overline{QT}$ es un diámetro, nótese que $QT = 2r$.

Se dice que el arco PT (que se denota $\widehat{PT}$) es la reunión de puntos que están sobre la circunferencia y que están en el interior del $\angle POT$. Este arco tiene una medida en grados. Los arcos se pueden sumar así: $m\widehat{PT} + m\widehat{PQ} = m\,\widehat{QPT}$. . La medida en grados de una semicircunferencia es 180 y la medida en grados de la circunferencia es 360.

El $\angle POT$ es un ángulo central y $m\angle POT = m\,\widehat{PT}$, otro ángulo que se puede formar en la circunferencia es un ángulo inscrito, que es aquel que tiene su vértice sobre la circunferencia y los lados del ángulo contienen los extremos del arco, como el $\angle CGD$, la medida de todo ángulo inscrito es la mitad del arco que intercepta, es decir, $m\angle CGD = \frac{1}{2}m\,\widehat{CD}$. Por esta razón todo ángulo inscrito en una semicircunferencia es un ángulo recto.

Se pueden dibujar figuras dentro de la circunferencia, si los vértices de una figura están en la circunferencia se dice que la figura está *inscrita* en la circunferencia. Si cada lado de la figura es tangente a la circunferencia, se dice que la figura está *circunscrita* a la circunferencia.

Figura 2-18: Rectas en la circunferencia



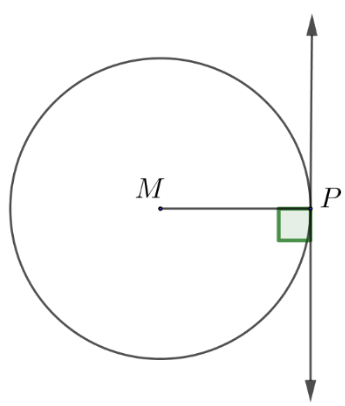
Como se mencionó anteriormente en la figura 2-16 $\overline{QP}$ es una cuerda. La recta que pasa por el punto P es tangente a la circunferencia porque sólo la corta en un punto. La recta $\overleftrightarrow{TJ}$ es secante de la circunferencia ya que corta a la circunferencia en dos puntos.

El interior de una circunferencia es el conjunto de todos los puntos que tienen una distancia menor al radio con el centro. El exterior es el conjunto de los puntos que tienen una distancia al centro mayor que el radio.

Después de conocer los conceptos básicos dentro de la geometría del círculo se nombran a continuación los teoremas que se usan durante el desarrollo de este trabajo.

- **Teorema 1:** *Toda tangente a una circunferencia es perpendicular al radio trazado por el punto de contacto*.

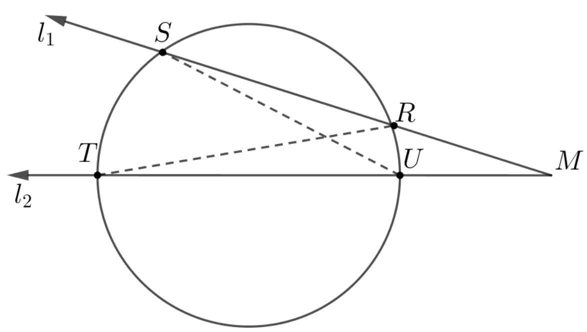
Figura 2-19: Tangente



Demostración: Supongamos que la recta no es perpendicular a $\overline{MP}$. Sea F el punto de la perpendicular desde M con $F \neq P$. Sea R un punto sobre el rayo opuesto a $\overrightarrow{FP}$. Tal que, $FR = FP$. Entonces se generan dos triángulo congruentes por el criterio LAL ($\Delta MFR \cong \Delta MFP$). Por lo tanto, la recta cortaría a la circunferencia en dos puntos, lo que es una contradicción ya que la recta es tangente. Luego, la tangente es perpendicular al radio.

- **Teorema de la potencia de un punto:** *Sea C una circunferencia y M un punto exterior a ella. Y sea L_1 una secante que pasa por M y corta a C en dos puntos R y S; y sea L_2 otra secante que corta a C en U y T, entonces* $MR \cdot MS = MU \cdot MT$.

Figura 2-20: Teorema de la potencia



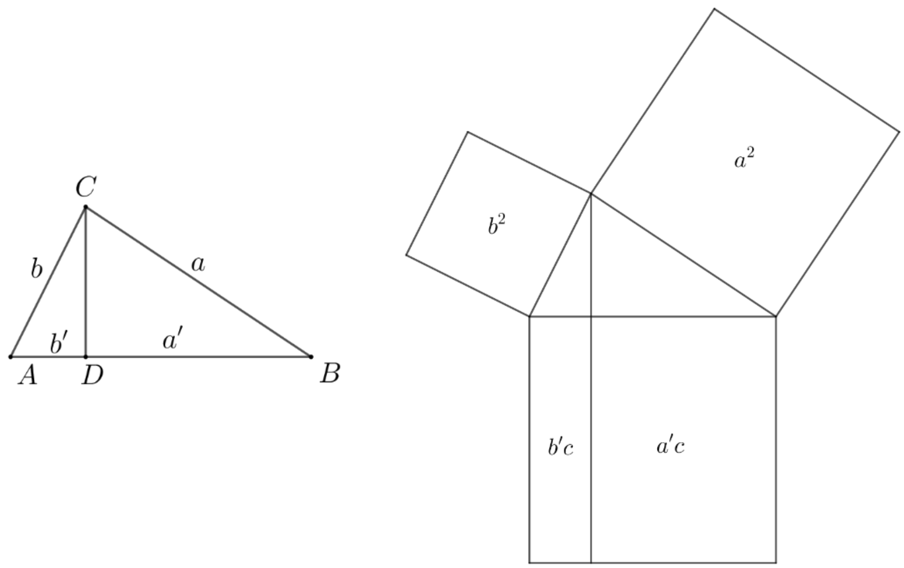
Demostración: Consideramos los $\Delta MSU\ y\ \Delta MTR$. Estos triángulos comparten el $\angle M$, además $\angle MSU \cong \angle MTR$, porque están inscritos en el mismo arco $\widehat{RU}$. Luego por el criterio AA tenemos que $\Delta MSU \sim \Delta MTR$. Por tanto, $\frac{MS}{MT} = \frac{MU}{MR}$ y así, $MR \cdot MS = MU \cdot MT$. (Moise, 1986)

2.7 El Teorema de Pitágoras

Luego de hacer un recuento histórico y disciplinar por los términos y elementos que necesitaremos para poder entender las distintas demostraciones que hay del Teorema de Pitágoras nos centramos en estudiar algunas. En una sección anterior hemos visto la demostración hecha por Euclides.

Empezaremos con el enunciado que conocían los griegos **"***El área del cuadrado construido sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de las áreas* *de los cuadrados construidos sobre los catetos.*" (Moise, 1986). La demostración que hizo Pitágoras incluía su propia teoría de proporciones y se apoyaba construyendo triángulos sobre el dibujo original como se muestra a continuación:

Figura 2-21: Teorema de Pitágoras



Para esta demostración, Pitágoras usó teoría de proporciones. Sea el triángulo rectángulo ABC, con el ángulo recto en C. Se traza la altura $\overline{CD}$, esta altura determina dos segmentos $b' y\, a'$ que son las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa $\Delta ADC \sim \Delta CDB \sim \Delta ACB$, ya que los ángulos de los tres triángulos son congruentes. Al estudiar la semejanza del $\Delta ADC\ y\ \Delta ACB$, se cumplen las siguientes proporciones: $\frac{b}{b'} = \frac{c}{b} \Rightarrow b^2 = b'c$. Y de la semejanza del $\Delta CDB\ y\ \Delta ACB$, se cumplen las siguientes proporciones: $\frac{a}{a'} = \frac{c}{a} \Rightarrow a^2 = a'c$.

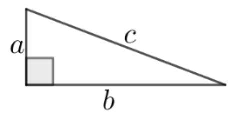
Si se suman las dos igualdades obtenidas en cada semejanza queda: $a^2 + b^2 = a'c + b'c = c(a' + b')$, pero $a' + b' = c$. Por lo tanto, $a^2 + b^2 = c^2$.

2.7.1 Demostración algebraica

En esta prueba del Teorema de Pitágoras, se usan entre otros, congruencia de triángulos, áreas de figuras planas y finalmente un recurso algebraico, del cual hemos derivado el nombre de esta demostración.

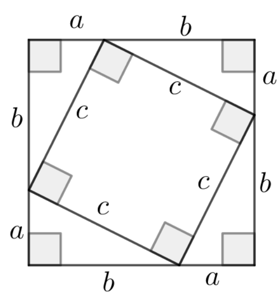
Consideremos un triángulo rectángulo de catetos a y b e hipotenusa c como lo muestra la figura 2-22.

Figura 2-22: Triángulo rectángulo para demostración algebraica



Ahora se construye un cuadrado de lado de $a+b$, como lo muestra la figura. Luego se dibujan cuatro triángulos rectángulos con catetos de longitud $a\ y\ b$.

Figura 2-23: Demostración algebraica del Teorema de Pitágoras



Es fácil verificar que los cuatro triángulos son congruentes por el criterio LAL, luego la hipotenusa de los cuatro será igual a c (como se ve en la figura). Por lo tanto, sus áreas son iguales.

Como los ángulos agudos de un triángulo rectángulo son complementarios entonces el cuadrilátero formado por las cuatro hipotenusas es un cuadrado.

Ahora, por el postulado de adición de áreas podemos ver que el área del cuadrado grande es igual al área del cuadrado pequeño más el área de los cuatro triángulos rectángulos. Así tenemos que el área es:

$$(a+b)^2 = c^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} ab$$

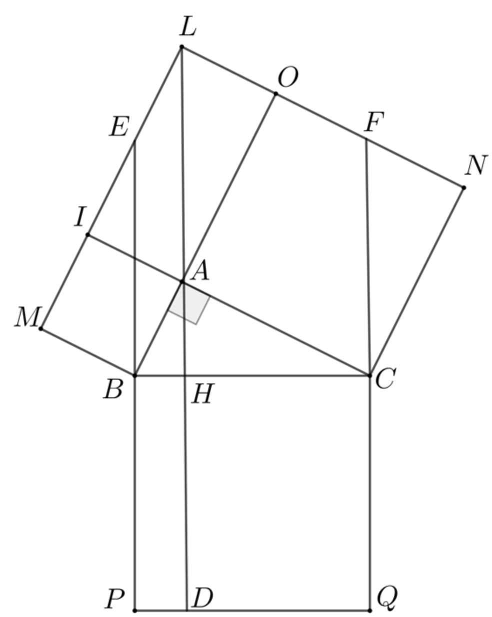
$$a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

2.7.2 Demostración de Pappus

Pappus presentó su demostración del Teorema de Pitágoras siguiendo lo hecho por Euclides, comparando las áreas de paralelogramos que están sobre las mismas paralelas y que tienen bases iguales.

Figura 2-24: Demostración de Pappus del Teorema de Pitágoras



Para realizar la prueba se construyen cuadrados sobre los lados del triángulo rectángulo ABC. Luego se traza $\overline{AH}$ y se prolonga hasta $L\ y\ D$. Se forma así el rectángulo $AILO$ que está compuesto por dos triángulos rectángulos iguales a ΔABC, luego $LA = BC = HD$. Lo anterior garantiza que los paralelogramos $ABEL\ y\ BHPD$ tienen la misma área, ya que su base es igual y están sobre las mismas paralelas. Lo mismo ocurre con los paralelogramos $ABEL\ y\ ABMI$, aquí la base igual es $\overline{AB}$, luego los paralelogramos tienen la misma área. Por lo tanto, $BHPD\ y\ ABMI$ tienen la misma área.

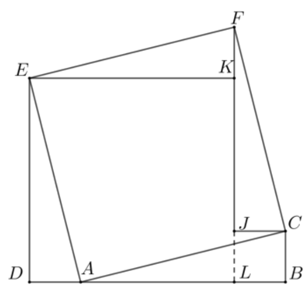
De manera análoga se puede ver que el paralelogramo $ACFL\ y\ HCQD$ tienen la misma área y $ACFL\ y\ ACNO$ tienen la misma área. Por lo tanto, el área de los paralelogramos $ACNO\ y\ HCQD$ son iguales.

Así, el cuadrado $BPQC$, que está sobre la hipotenusa $\overline{BC}$, es igual a la suma de los cuadrados $ABMI\ y\ ACNO$, que están sobre los catetos $\overline{AB}\ y\ \overline{AC}$ respectivamente.

2.7.3 Demostración de Thâbit Ibn Qurra

Esta es una demostración del Teorema de Pitágoras del tipo de congruencia por sustracción, esto quiere decir, que a una figura se le van quitando partes congruentes. Intentando seguir un estilo de prueba socrática al usar el método de reducción y composición. Reduce a triángulos y recompone por yuxtaposición. (González, 2008)

Figura 2-25: Demostración de Thâbit Ibn Qurra del Teorema de Pitágoras



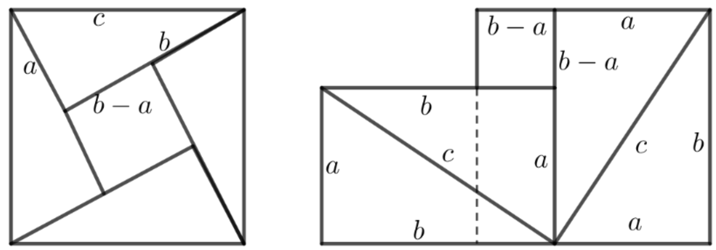
Sea el triángulo rectángulo ABC, con ángulo recto en B. Se construye el cuadrado $ACFE$ sobre la hipotenusa AC, luego se construye el triángulo rectángulo ADE con ángulo recto en D, este triángulo resulta congruente con el triángulo ABC. Se construye el cuadrado $CJLB$ sobre el lado CB, se traza la perpendicular a $\overline{JC}$ que pasa por F. Así se forma el triángulo FJC, congruente con el triángulo ABC. Por último, se traza la perpendicular a $\overline{FJ}$ que pasa por E, formándose así el triángulo rectángulo EKF, el cual también es congruente al triángulo ABC.

Después de estas construcciones se forma la figura $BCFEDA$, si a esta figura se le quita el triángulo ABC y el triángulo ADE (que son congruentes), resulta el cuadrado $ACFE$ sobre la hipotenusa AC.

Por otra parte, si a la figura le quitamos los triángulos $FJC\ y\ EKF$ queda una figura compuesta por los cuadrados $JLBC\ y\ LKED$ que están sobre los catetos $BC\ y\ AB$. Como se le restaron figuras congruentes tenemos que el cuadrado $ACFE$ es igual a la suma de los cuadrados $JLBC$ y $LKED$.

2.7.4 Demostración de Bhaskara

Figura 2-26: Demostración de Bhaskara del Teorema de Pitágoras



Bhaskara, el monje hindú, hizo una demostración del Teorema de Pitágoras, usando los dibujos que se ven en la figura 2-25.

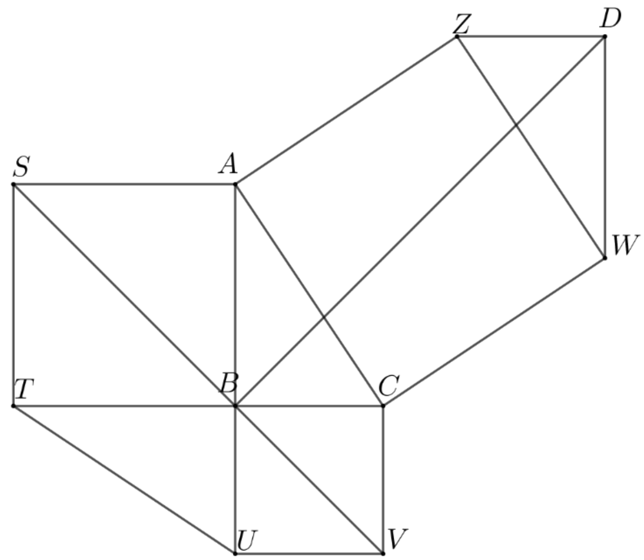
Se construye un cuadrado de lado c, compuesto por cuatro triángulos rectángulos de catetos a y b, en el centro se forma un cuadrado de lado $b - a$ como se ve en la figura del lado izquierdo. Se reorganizan los triángulos y el cuadrado y quedan como la figura del lado derecho, de esta nueva figura el área es igual a la suma de dos cuadrados uno de lado a y otro de lado b.

Así ha quedado demostrado gráficamente que $c^2 = a^2 + b^2$. Y algebraicamente tenemos que $c^2 = 4 \cdot \frac{1}{2}ab + (b - a)^2$ al desarrollar esto tenemos que $c^2 = 2ab + b^2 - 2ab + c^2$, por lo tanto, $c^2 = a^2 + b^2$.

2.7.5 Demostración de Da Vinci

Da Vinci hace su versión de la prueba del Teorema de Pitágoras del tipo congruencia por sustracción.

Figura 2-27: Demostración de Da Vinci del Teorema de Pitágoras

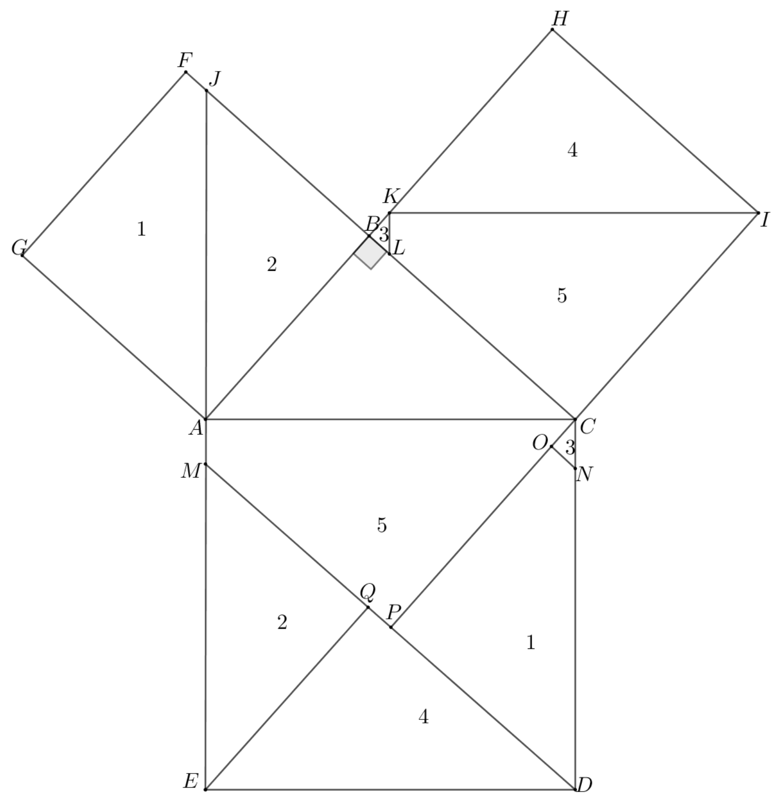


Se parte del triángulo rectángulo ABC con ángulo recto en B. En esta demostración además de construir los cuadrados sobre los lados del triángulo ABC construye los triángulos TBU y WDZ congruentes con el triángulo original. Traza los $\overline{SV}$ y $\overline{DB}$. El primer segmento es la suma de las diagonales de los dos cuadrados correspondientes a los catetos. Además, el primer segmento forma dos cuadriláteros $SACV$ y $STUV$ que son congruentes. De la misma forma ocurre con el segundo segmento, los cuadriláteros congruentes que se forman son $BAZD$ y $DWCB$. Ahora veamos que $SA = AB, AZ = AC$ y $ZD = CV$. Por otro lado, $\angle SAC \cong \angle BAZ$ y $\angle AZD \cong \angle ACV$. Por lo tanto, $SACV \cong BAZD$, análogamente se prueba que $STUV \cong DWCB$ así las áreas de los cuadriláteros serán iguales. Luego, $ACVUTS$ y $ABCWDZ$ tienen la misma superficie. Por último, si a estos polígonos se le resta el triángulo que tienen en común queda probado el teorema.

2.7.6 Demostración de Göpel

Es una demostración del teorema de Pitágoras tipo rompecabezas. En esta demostración se hacen los cuadrados sobre los lados del triángulo rectángulo ABC con ángulo recto en B. Y los cuadrados que están sobre los catetos se dividen en cinco zonas. En el cuadrado sobre AB prolonga $\overline{AE}$, hasta llegar a J. Así se forman las regiones 1 y 2, luego en el cuadrado sobre BC se traza la paralela a $\overline{AC}$ que pasa por I, formándose así el $\overline{IK}$, luego se traza la paralela a $\overline{JA}$ que pasa por K. Así se forman las regiones 3, 4 y 5.

Figura 2-28: Demostración de Göpel del Teorema de Pitágoras



Luego, la prueba usa el tipo de congruencia por adición. Y las cinco piezas de los cuadrados sobre los lados se pueden reorganizar y formar el cuadrado que está formado sobre la hipotenusa, así que el trabajo de Göpel consistió en demostrar que las regiones determinadas en el cuadrado construido sobre la hipotenusa son congruentes de la manera como lo ilustra el dibujo con las figuras determinadas en los cuadrados construidos sobre los catetos. (González, 2008)

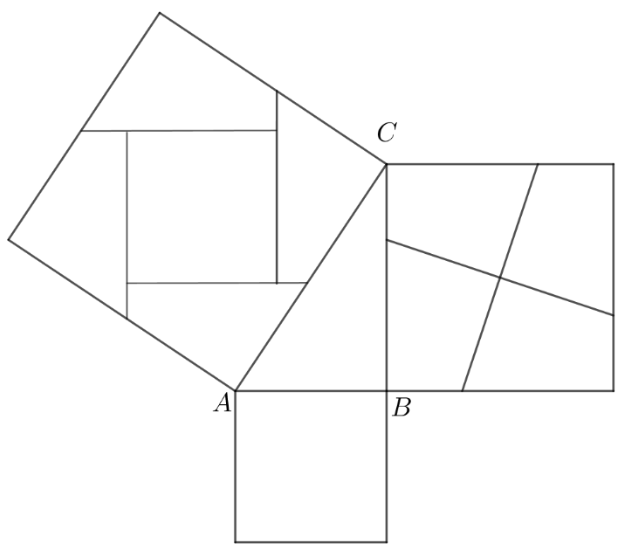
Para probar esto se usan los postulados de congruencia vistos anteriormente. Primero se debe hacer la construcción de las cinco regiones sobre el cuadrado de la hipotenusa. Para esto se traza $\overline{MD} \parallel \overline{BC}, \overline{EQ} \parallel \overline{AB}, \overline{CP} \parallel \overline{AB}\ y\ \overline{ON} \parallel \overline{BC}$. Además, se debe cumplir que $OC = BK$. Luego de hacer estas construcciones se puede verificar que $\Delta ABC \cong \Delta KHI \cong \Delta EQD$ gracias al postulado ALA. De la manera similar se puede verificar que $\Delta ABJ \cong \Delta EKM$, esto también se tiene por el postulado ALA, $\Delta KBL \cong \Delta CON$ por el postulado ALA. Para verificar que las dos regiones 5 son congruentes se traza el segmento $\overline{MC}$ y se traza $\overline{LI}$, para dividir la región en dos triángulos. Primero se verifica que por el postulado

ALA $\Delta ACM \cong \Delta KIL$. Luego por el mismo postulado se verifica que $\Delta MCP \cong \Delta LIC$, así $ACPM \cong KICL$. Por último, $ONDP \cong FJAG$.

2.7.7 Demostración de Perigal

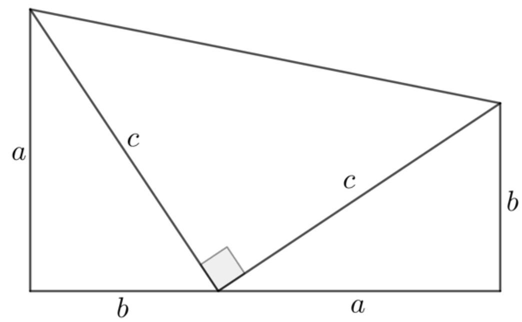
Perigal hace una demostración similar a la anterior. Sobre el triángulo rectángulo ABC con ángulo recto en B, se construyen los cuadrados sobre la hipotenusa y los catetos. En el cuadrado sobre el mayor de los catetos, se trazan dos rectas perpendiculares entre sí, una de ellas es paralela a la hipotensa del triángulo, estas rectas se cortan en el centro del cuadrado, formando así cuatro regiones congruentes entre sí. Luego, con estas cuatro piezas y el cuadrado del cateto menor cubre el cuadrado cobre la hipotenusa.

Figura 2-29: Demostración de Perigal del Teorema de Pitágoras



2.7.8 Demostración de Garfield

Figura 2-30: Demostración de Garfield del Teorema de Pitágoras



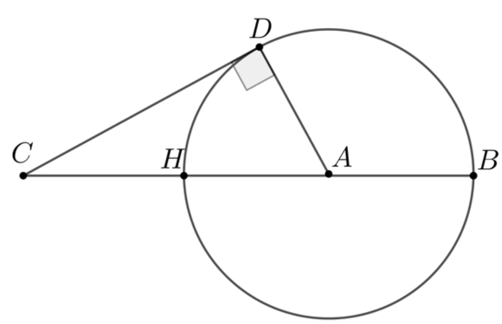
Garfield, construye un trapecio de bases $a\ y\ b$ y altura $(a+b)$. Este trapecio está compuesto por tres triángulos rectángulos dos con catetos $a\ y\ b$ y otro isósceles de catetos c.

Siguiendo los postulados de las áreas tenemos que el área del trapecio es: $A = \frac{(b+a)}{2}(a+b) = \frac{a^2+2ab+b^2}{2}$. Por otra parte, el área del trapecio es la suma de las áreas de los tres triángulos $A = 2 \cdot \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}c^2 = ab + \frac{1}{2}c^2$. Por lo tanto, $\frac{a^2+2ab+b^2}{2} = ab + \frac{1}{2}c^2$, si se multiplica por dos en ambos lados de la ecuación $a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$, luego, $a^2 + b^2 = c^2$.

2.7.9 Demostración a través de la circunferencia

Sea el triángulo rectángulo ADC con ángulo recto en D. Sea la circunferencia con centro en A y radio $\overline{AD}$

Figura 2-31: Demostración del Teorema de Pitágoras con potencia



Por el teorema de la potencia tenemos que $CH \cdot CB = CD^2$, pero $CH = AC - AH = AC - AD,$ por ser $AH \ y \ AD$ radios de la circunferencia. De igual forma podemos afirmar que $CB = AC + AB = AC + AD$. Ahora se reemplaza en la ecuación original y obtenemos que: $(AC - AD)(AC + AD) = CD^2$. Si se resuelve el producto $AC^2 - AD^2 = CD^2$. Por último, $AC^2 = AD^2 + CD^2$.

2.8 La recta y los números reales

En el conjunto de los números reales se definen dos operaciones, la adición y la multiplicación. Los números reales con la adición son un grupo abeliano, lo cual significa que dicha operación es conmutativa, asociativa, existe un elemento neutro, en este caso el 0, que es el modulo de la suma y todo número real tiene inverso aditivo. La multiplicación en los números reales es conmutativa y asociativa, existe un elemento identidad para la multiplicación que es el 1 y todo elemento diferente de 0 tiene inverso multiplicativo. Además, la multiplicación es distributiva con respecto a la adición. Por lo tanto los números reales junto con las operaciones de adición y multiplicación son un campo.

Ahora bien, el siguiente postulado lo consideramos importante para el desarrollo del trabajo, este postulado, de manera intuitiva, nos dice que los números reales y la recta son idénticos.

Postulado de la regla. "*Podemos establecer una correspondencia entre los puntos de una recta y los números reales de manera que:*

(1) A cada punto de la recta corresponde exactamente un número real;
(2) A cada número real corresponde exactamente un punto de la recta; y
(3) La distancia entre dos puntos cualesquiera es el valor absoluto de la diferencia de los números correspondientes." (Moise, 1986).

La correspondencia mencionada en este postulado hace referencia a un sistema de coordenadas, cada punto en la recta es una coordenada. Si las coordenadas de dos puntos *A* y *B* son respectivamente a y b, la longitud del segmento AB es $AB = |b - a|$. Dentro del sistema de coordenadas que tiene la recta numérica se puede asignar un punto de referencia P de manera que este punto sea 0.

En este trabajo, haciendo uso del teorema de Pitágoras y de los instrumentos físicos, la regla y el compás, se ubican algunos números reales sobre la recta numérica, los números que se ubican de esta forma, de manera formal con la regla y el compás, hacen parte de un conjunto de números llamados construibles. A continuación señalamos algunos resultados relacionados con los objetos ideales regla y compás, los cuales nos sirven como soporte teórico para el desarrollo de algunas actividades relacionadas con el Teorema de Pitágoras y la ubicación en la recta numérica de algunos números reales.

Definición: Un número a es construible si se puede construir un segmento de longitud $|a|$ a partir de otro segmento de longitud 1 en un número finito de pasos y usando solamente regla y compás. (Fraleigh, 1988)

Es de anotar que el tratamiento de la *regla y el compás* no será exhaustivo, por ahora nos interesa solamente comentar algunos aspectos de como a partir de dos números construibles "que no sean cero" se construye su suma, su producto, su inverso y su raíz cuadrada. En particular resaltamos en este punto que el conjunto de los números construibles C es un subcuerpo cerrado de los números reales. Un tratamiento formal de estos aspectos se puede encontrar entre otros en Fraleigh y Herstein.

En este punto es pertinente anotar que el interés es que los estudiantes ubiquen algunos números irracionales en la recta numérica por ejemplo $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ etc. De nuevo, creemos que esta discusión sustenta de cierta manera algunos aspectos formales de la ubicación de estos números en la recta numérica.

Si a y b son números construibles, las figuras ilustran la construcción de $a+b, a-b, ab$, $\frac{a}{b}$ para $b \neq 0$

Figura 2-32: Suma y resta de construibles es construible

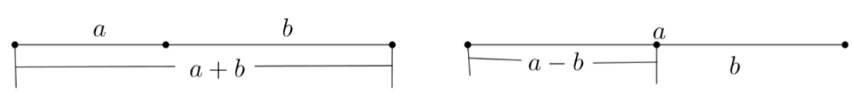


Figura 2-33: Producto de construibles es construible

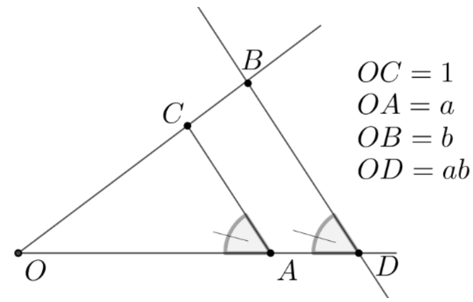
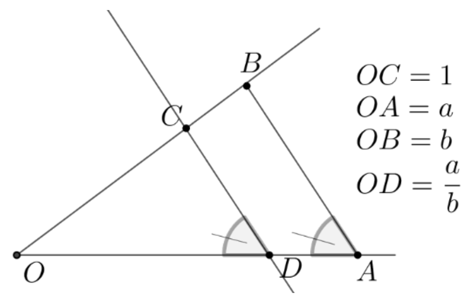
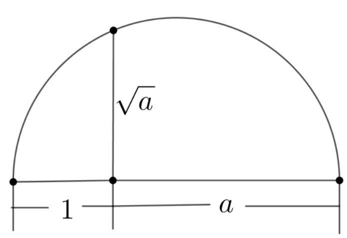


Figura 2-34: Cociente de construibles es construible



Si a es un número real positivo construible, entonces $\sqrt{a}$ es un número construible como lo ilustra la figura.

Figura 2-35: La raíz cuadrada de un real positivo es construible



Este último resultado nos permitió en este trabajo poder construir raíces cuadradas aplicando el Teorema de Pitágoras.

Observación: A partir de un segmento de longitud 1 se pueden construir los números enteros y que también se pueden construir los números racionales. Ahora bien, existen números reales que no son construibles, para tal fin ilustraremos este hecho con problemas antiguos de la geometría, cuya respuesta es negativa, tales como: la cuadratura del circulo, la duplicación del cubo y la trisección del ángulo, estos fueron resueltos con herramientas del algebra abstracta en el siglo XIX. Es conocido el hecho de que dada una circunferencia, no es posible construir con regla y compás un cuadrado de área igual al de la circunferencia dada, al aplicar este resultado a una circunferencia de radio r, lo que se está diciendo es que no se puede construir con regla y compas un segmento de longitud $\sqrt{\pi}$, como un caso particular de este hecho, si $r = 1$, se sigue que no es posible construir con regla y compas el número $\sqrt{\pi}$.

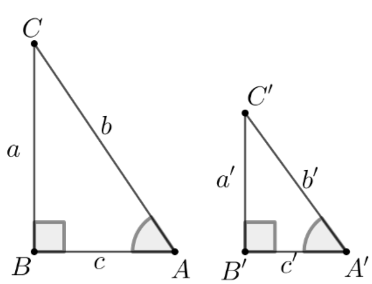
De la misma forma podemos ver que no es posible construir un cubo cuyo volumen sea el doble de un cubo dado de lado l. Esto quiere decir que no es posible construir un segmento de longitud $l\sqrt[3]{2}$, para el caso particular de $l = 1$ se sigue que no se puede construir con regla y compás el número $\sqrt[3]{2}$. Así que no todos los números reales son construibles. Entonces el conjunto de los números construibles contiene al conjunto de los números racionales y es un subconjunto propio de los números reales, y como se mencionó anteriormente, el conjunto de los números construibles es un campo.

2.9 Las razones trigonométricas

La trigonometría apareció por primera vez en los trabajos de Hiparco, quien vivió en Rodas y murió en Alejandría en 125 a.C. Todas las teorías tanto en el campo de la trigonometría como en el campo de la astronomía se han difundido gracias a Ptolomeo, quien atribuye muchas ideas a Hiparco.

Consideremos los triángulos rectángulos semejantes $ABC\ y\ A'B'C'$ como se ven en la figura 2-36:

Figura 2-36: Razones en triángulos rectángulos



Por ser semejantes se cumplen las siguientes proporciones:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

De estas proporciones podemos deducir las siguientes:

$$\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'},\frac{c}{b}=\frac{c'}{b'},\frac{a}{c}=\frac{a'}{c'},\frac{b}{a}=\frac{b'}{a'},\frac{b}{c}=\frac{b'}{c'}\ y\ \frac{c}{a}=\frac{c'}{a'}$$

Podríamos pensar que estas razones están ligadas al ángulo A, pero se pueden cumplir de manera similar con los otros ángulos de los triángulos ya que por ser semejantes sus ángulos son congruentes. Estas razones reciben el nombre de razones trigonométricas, son conocidas como: $seno, coseno, tangente, cosecante, secante\ y\ cotangente$ y se escriben de manera abreviada así: $sen, \cos, tan, csc, \sec y\ cot$.

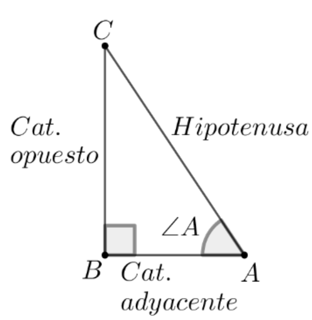
De esta manera y según la figura 2-35 tenemos que $sen\ A=\frac{a}{b}$, $\cos A=\frac{c}{b}, \tan A=\frac{a}{c}$, $\csc A=\frac{a}{b}, \sec A=\frac{b}{c}\ y \cot A=\frac{c}{a}$.

La primera de ellas ($seno$) de acuerdo a su etimología la palabra proviene del latín $sinus$ que significa curva o cavidad, esto se relaciona directamente con la gráfica de la función que está llena de curvas.

Estas razones las definimos sobre triángulos rectángulos en donde cada uno de los lados recibe los nombres de cateto opuesto a un ángulo, cateto adyacente e hipotenusa. (Vásquez, 2014).

En el ΔABC que muestra la figura se definen las razones trigonométricas del ángulo A, de la siguiente manera:

Figura 2-37: Razones trigonométricas

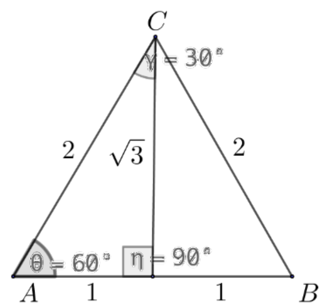


$$sen\ A=\frac{cat.opuesto}{hipotenusa}, cos\ A=\frac{cat.\ adyacente}{hipotenusa}\tan A=\frac{cat.opuesto}{cat.adyacente},$$

$$\csc A=\frac{hipotenusa}{cat.opuesto}, sec\ A=\frac{hipotenusa}{cat.adyacente}\ y\ \ cot\ A=\frac{cat.adyacente}{cat.opuesto}$$

A continuación, se deducirán las razones para los ángulos $30°, 45°\ y\ 60°$. Empezamos con un triángulo equilátero de lado 2 para deducir las razones de $30°\ y\ 60°$.

Figura 2-38: Razones trigonométricas de $30°$ y $60°$



$sen\ 30° = \frac{1}{2}, cos\ 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}, \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

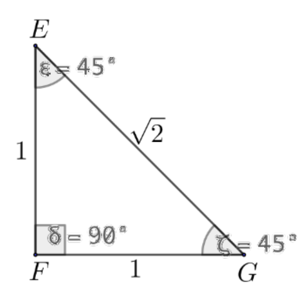
$csc\ 30° = 2, sec\ 30° = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\ y \cot 30° = \sqrt{3}$

$sen\ 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}, cos\ 60° = \frac{1}{2}, \tan 60° = \sqrt{3}$

$csc\ 60° = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}, sec\ 60° = 2\ y \cot 60° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Para deducir las razones de $45°$ se construye un triángulo rectángulo isósceles de catetos 1 e hipotenusa $\sqrt{2}$, como se muestra en la figura:

Figura 2-39: Razones trigonométricas de $45°$



$sen\ 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, cos\ 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \tan 45° = 1$

$csc\ 45° = \sqrt{2}, sec\ 45° = \sqrt{2}\ y\ \cot 45° = 1$

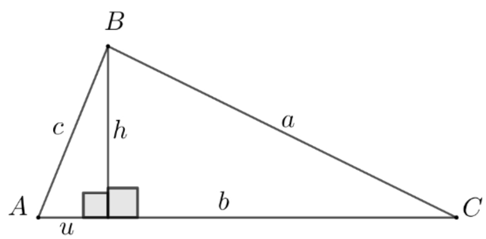
Como se puede ver estas razones se calculan para ángulos de un triángulo rectángulo, para poder calcular los valores de los ángulos y lados de otros triángulos se debe aplicar el teorema del coseno y del seno que se explican a continuación.

2.10 Teorema del coseno

El Teorema del Coseno nos permite hallar la medida de un lado conociendo los otros dos y el ángulo que se forma entre ellos, también nos permite hallar un ángulo conociendo los tres lados. A continuación, se muestra la demostración del teorema.

Demostración: En el ΔABC se traza la altura h desde B hasta $\overline{AC}$ y así se divide el $\overline{AC}$ en dos segmentos de longitud u y longitud $b-u$.

Figura 2-40: Teorema del coseno



(1) $c^2 = h^2 + u^2$ (por el Teorema de Pitágoras), ahora al despejar $h^2 = c^2 - u^2$
(2) $a^2 = h^2 + (b-u)^2$ al remplazar el valor de h^2 y desarrollar el producto notable se obtiene $a^2 = c^2 - u^2 + b^2 - 2bu + u^2 = c^2 + b^2 - 2bu$
(3) $Cos\ A = \frac{u}{c}$, luego $u = c\cos A$

Reemplazando (3) en (2) obtenemos:

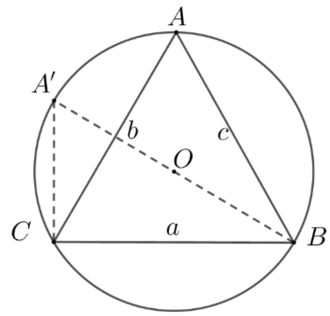
(4) $a^2 = c^2 + b^2 - 2bc\cos A$

Que es el resultado del Teorema del Coseno. De manera similar se puede probar que: $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$

2.11 Teorema del seno

El teorema del Seno nos permite hallar el valor de un lado conociendo un lado y el ángulo correspondiente y conociendo el ángulo correspondiente al lado que se quiere hallar. A continuación, se muestra una prueba del Teorema del Seno.

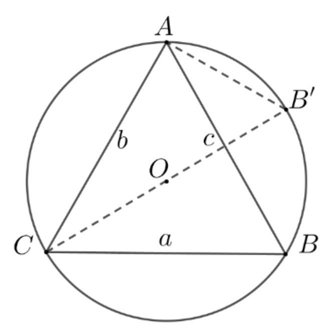
Figura 2-41: Teorema del seno I



Demostración: Para hacer esta prueba es necesario recordar que, dado un triángulo, por sus vértices que son tres puntos no colineales pasa una única circunferencia. Se considera el ΔABC inscrito en la circunferencia de radio R y centro O, como lo muestra la figura.

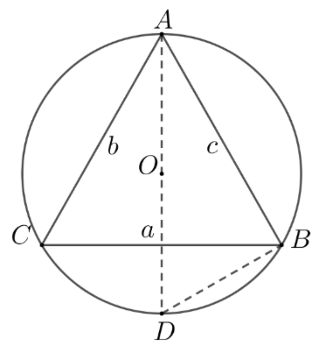
Se traza el diámetro $\overline{A'B}$, por definición $A'B = 2R$. Se traza $\overline{A'C}$, así $\angle A' \cong \angle A$ ya que están inscritos en la circunferencia y comparten el mismo arco. Además, el $\Delta A'CB$ es un triángulo rectángulo, ya que el $\angle C$ está inscrito en la circunferencia y su arco correspondiente es media circunferencia, por lo tanto, la medida del $\angle C = 90°$. Por ser un triángulo rectángulo se cumple que $sen\ A' = \frac{a}{2R}$ y al despejar $2R = \frac{a}{sen\ A'}$ y como $\angle A' \cong \angle A$ entonces se tiene que $2R = \frac{a}{sen\ A}$.

Figura 2-42: Teorema del seno II



Ahora bien, se prueba que sucede lo mismo con el lado b y su ángulo correspondiente $\angle B$, para esto se traza el diámetro $\overline{CB'}$, por definición $CB' = 2R$. Se traza $\overline{AB'}$, así $\angle B' \cong \angle B$ ya que están inscritos en la circunferencia y comparten el mismo arco. Además, el $\Delta B'AC$ es un triángulo rectángulo, ya que el $\angle A$ está inscrito en la circunferencia y su arco correspondiente es media circunferencia, por lo tanto, la medida del $\angle$A=90°. Por ser un triángulo rectángulo se cumple que $sen\, B' = \frac{b}{2R}$ y al despejar $2R = \frac{b}{sen\, B'}$ y como $\angle$B' $\cong\angle$B entonces se tiene que $2R = \frac{b}{sen\, B}$.

Figura 2-43: Teorema del seno III



Por último, se prueba los mismo para el lado c y al $\angle$C, para esto se traza el diámetro $\overline{AD}$, por definición $AD = 2R$. Se traza $\overline{DB},$ así $\angle$D $\cong\angle$C ya que están inscritos en la circunferencia y comparten el mismo arco. Además, el ΔABD es un triángulo rectángulo, ya que el $\angle$B está inscrito en la circunferencia y su arco correspondiente es media circunferencia, por lo tanto, la medida del $\angle$B=90°. Por ser un triángulo rectángulo se cumple que $sen\, D = \frac{c}{2R}$ y al despejar $2R = \frac{c}{sen\, D}$ y como $\angle$D $\cong\angle$C entonces se tiene que $2R = \frac{c}{sen\, C}$.

Por lo tanto, se puede afirmar que: $\frac{a}{sen\, A} = \frac{b}{sen\, B} = \frac{c}{sen\, C}$.

2.12 Las ternas pitagóricas y el Teorema de Fermat

Otro personaje que también habló acerca de Pitágoras, o mejor de una generalización de su Teorema, fue Fermat, ya que en el intento de demostrar su afirmación los matemáticos tardaron 300 años, en los cuales se desarrolló mucho conocimiento en el campo de la teoría de números.

Fermat se preocupó por estudiar algunas ecuaciones diofánticas y sus soluciones aplicando las propiedades de la aritmética $\mathbb{Z}$, como el máximo común divisor, mínimo común múltiplo, descomposición en factores primos, la congruencia módulo un número entero y sus propiedades. Además de estas propiedades para trabajar en sus demostraciones creó un método de demostración llamado “descenso infinito” que consiste en suponer que existe un número natural n que tiene una propiedad P (ésta será la hipótesis de descenso). Luego esta propiedad se prueba para un número m menor que (este es el paso de descenso); pero esto nos llevaría a una contradicción, ya que siempre existiría un número natural menor que tendría la propiedad P, lo cual es imposible. Por lo tanto, la hipótesis de descenso es falsa para todo número natural. (Albis, 1973)

Con este método Fermat logró probar que: el área de un triángulo rectángulo de lados enteros no puede ser un cuadrado perfecto, $x^3 + y^3 = z^3$ no tiene soluciones en los enteros para $xyz \neq 0$, que $y^2 + 2 = x^3$ tiene como únicas soluciones enteras a $x = 3, y = \pm 5$, que $y^2 + 4 = x^3$ tiene como únicas soluciones enteras a $x = 2, y = \pm 2$ y $x = 5, y = \pm 11$; por último, logró probar que todo primo de la forma $p = 4n + 1$ es una suma de dos cuadrados.

En el estudio de estas ecuaciones probó también que la ecuación de la forma $x^2 + y^2 = z^2$ (1) (tal y como dice el teorema de Pitágoras), admite un número infinito de soluciones enteras para $xyz \neq 0$ si se cumple que esos números sean primos relativos entre sí dos a dos y los números tengan esta forma: $x = 2ab, y = a^2 - b^2$ y $z = a^2 + b^2$ donde a y b son primos relativos y sólo uno de ellos es impar.

Las ternas creadas por Fermat en realidad se cumplen para cualquier a y b sin necesidad de cumplir tantas condiciones, ya que si reemplazamos lo valores de x, y y z en la ecuación (1) obtenemos:

$$(2ab)^2 + (a^2 - b^2)^2 = (a^2 + b^2)^2$$

$$4a^2b^2 + a^4 - 2a^2b^2 + b^4 = a^4 + 2a^2b^2 + b^4$$

$$a^4 + 2a^2b^2 + b^4 = a^4 + 2a^2b^2 + b^4$$

Las condiciones que se dan sobre a y b sirven para hacer una demostración de la forma general de las soluciones de la ecuación $m^4 = t^2 + n^4$.

Además de todo lo anterior logró probar que la ecuación $x^4 + y^4 = z^4$, no tiene soluciones enteras. Esta ecuación es un caso particular de lo que se conoce como el último teorema de Fermat o el teorema de Fermat-Wiles (este último fue quien después de 300 años lo logró probar) que dice: *Sea n un entero mayor que dos, entonces con* *existen soluciones enteras* x, y *e* z *que cumplan que* $x^n + y^n = z^n$ *con* $xyz \neq 0$.

Una forma de encontrar ternas que corresponden a los lados de un triángulo rectángulo, no necesariamente formadas por números enteros, es considerando el siguiente resultado de Fermat.

Teorema*: Todo primo de la forma p = 4n +1 es la suma de dos cuadrados.*

Este teorema garantiza que $p^2 = x^2 + y^2$, con x *e* y enteros. No hay una característica o una forma especifica que deban cumplir los valores de x *e* y. Estos valores de (p, x, y) cumplen el Teorema de Pitágoras.

Observación: Es fácil ver que el teorema anterior permite formar ternas que pueden representar los lados de un triángulo rectángulo, con una hipotenusa de valor irracional $\sqrt{p}$.

3 Aspectos Didácticos

3.1 Acerca de los lineamientos curriculares

El Ministerio de Educación Nacional (MEN) en 1998 reglamentó la enseñanza de las áreas que se deben enseñar en los colegios del país. En la enseñanza de las matemáticas propone que las materias deben darles las herramientas suficientes a los estudiantes para que adquieran las competencias que ellos proponen para el área. El correcto desarrollo de actividades que permitan adquirir estas competencias logrará que los estudiantes sean capaces de utilizar su saber matemático para resolver problemas e irse adaptando a las situaciones que se les presentan. Para poder lograr este tipo de aprendizaje se necesita de actividades y ambientes propicios para que el proceso de aprendizaje sea continuo.

En el área de matemáticas se deben tener en cuenta dos tipos de conocimiento, uno es el conceptual que el MEN define como el que "*está más cercano a la reflexión y se caracteriza por ser un conocimiento teórico, producido por la actividad cognitiva, muy rico en relaciones entre sus componentes y con otros conocimientos; tiene un carácter declarativo y se asocia con el saber qué y el saber por qué*". ((MEN), 1998) El segundo es el procedimental que se define como el que "*está más cercano a la acción y se relaciona con las técnicas y las estrategias para representar conceptos y para transformar dichas representaciones; con las habilidades y destrezas para elaborar, comparar y ejercitar algoritmos y para argumentar convincentemente. El conocimiento procedimental ayuda a la construcción y refinamiento del conocimiento conceptual y permite el uso eficaz, flexible y en contexto de los conceptos, proposiciones, teorías y modelos matemáticos; por tanto, está asociado con el saber cómo*." ((MEN), 1998)

El aprendizaje de las matemáticas como lo plantea el ministerio tiene que desarrollarse a través de 5 pensamientos que son: pensamiento numérico y sistemas numéricos, pensamiento espacial y sistemas geométricos, pensamiento métrico y sistemas de medidas, pensamiento aleatorio y sistema de datos y, por último, pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos. Para trabajar estos pensamientos el MEN sugiere que se hagan actividades de aprendizaje significativo estas actividades el MEN las define como "*situaciones que superan el aprendizaje pasivo, gracias a que generan contextos accesibles a los intereses y a las capacidades intelectuales de los estudiantes y, por tanto, les permiten buscar y definir interpretaciones, modelos y problemas, formular estrategias de solución y usar productivamente materiales manipulativos, representativos y tecnológicos.*" ((MEN), 1998)

Esta propuesta se desarrolló con estudiantes del grado octavo del Liceo Navarra y se fundamenta en los estándares del MEN que garantizan que los estudiantes al final el grado:

- Conjeturen y verifiquen propiedades de congruencias y semejanzas entre figuras bidimensionales y entre objetos tridimensionales en la solución de problemas.
- Reconozcan y contrasten propiedades y relaciones geométricas utilizadas en demostración de teoremas básicos (Pitágoras y Thales).
- Apliquen y justifiquen criterios de congruencias y semejanza entre triángulos en la resolución y formulación de problemas.
- Usen representaciones geométricas para resolver y formular problemas en las matemáticas y en otras disciplinas. ((MEN), 1998)

Pero dentro de este trabajo no sólo se trabaja este pensamiento, también se trabaja el pensamiento métrico y sistemas de medidas. Los estándares para este pensamiento garantizan que al final del curso los estudiantes:

- Generalicen procedimientos de cálculo válidos para encontrar el área de regiones planas y el volumen de sólidos.
- Seleccionen y usen técnicas e instrumentos para medir longitudes, áreas de superficies, volúmenes y ángulos con niveles de precisión apropiados.
- Justifiquen la pertinencia de utilizar unidades de medida estandarizadas en situaciones tomadas de distintas ciencias. ((MEN), 1998)

Dentro del pensamiento numérico y sistemas numéricos, los estándares garantizan que los estudiantes:

- Utilicen números reales en sus diferentes representaciones y en diversos contextos.
- Resuelvan problemas y simplifiquen cálculos usando propiedades y relaciones de los números reales y de las relaciones y operaciones entre ellos. ((MEN), 1998)

Por último, dentro del pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos también los lineamientos establecen que los estudiantes:

- Construyan expresiones algebraicas equivalentes a una expresión algebraica dada.
- Usen procesos inductivos y lenguaje algebraico para formular y poner a prueba conjeturas. ((MEN), 1998).

Las temáticas mencionadas en los estándares, se usaron para desarrollar diferentes demostraciones del teorema de Pitágoras, de esta manera además de afianzar el conocimiento del Teorema se refuerzan los conocimientos que los estudiantes deben saber, en temáticas del álgebra cuando se proponen modelos para encontrar ternas pitagóricas y la solución de ecuaciones de segundo grado; también se trabaja con los números reales, ya que con el teorema de Pitágoras se pueden estudiar algunos números irracionales y así se pueden ubicar estos sobre la recta numérica (construyéndolos con regla y compás).

3.2 El modelo de Van Hiele

Este modelo fue presentado por una pareja de esposos holandeses que eran profesores de secundaria. El modelo explica el avance en el razonamiento geométrico de los estudiantes. Este avance lo dividen en cinco niveles, el primero es de visualización o reconocimiento, el segundo es de análisis, le sigue la deducción informal y la deducción formal, se termina con el rigor. Los estudiantes deben pasar por todos los niveles anteriormente mencionados y en el orden establecido cada vez que se enfrenten a un aprendizaje nuevo. Este método permite al profesor mejorar la capacidad de razonamiento de los estudiantes, ya que el profesor puede organizar el currículo para poder ayudar a los estudiantes a pasar de un nivel al otro.

Una de las ventajas que tiene este modelo es que al superar un nivel los conocimientos que el estudiante utilizará para el nivel siguiente serán los del nivel anterior, esto hace que los estudiantes estén reforzando constantemente todo lo que van aprendiendo en cada nivel. Los niveles de Van Hiele están organizados de la siguiente forma (Gamboa, 2013):

- **Nivel 1 (Reconocimiento):** En este nivel el estudiante reconoce las figuras como un todo, pero no diferencia sus partes. No conoce las propiedades determinantes de las mismas. Sin embargo, es capaz de reproducir las figuras y de compararlas con las cosas que están en su entorno, por eso las descripciones que hace de las figuras son del tipo visual. No hay lenguaje geométrico para hablar acerca de las figuras.
- **Nivel 2 (Análisis):** En este nivel el estudiante es capaz de reconocer las partes y propiedades de las figuras, gracias a estas puede reconocerlas. Pero no puede establecer relaciones entre grupos distintos de figuras. Estas propiedades que reconoce las aprende de forma empírica, esto le impide aún dar definiciones formales.
- **Nivel 3 (Deducción informal):** El estudiante determina las propiedades de las figuras y puede reconocer que unas propiedades se derivan de otras. Establece relaciones entre grupos de figuras y las condiciones necesarias y suficientes que deben cumplir las figuras, este permite que pueda dar definiciones. Esto le permite seguir las demostraciones, pero aún no las entiende totalmente. Lo anterior implica que el estudiante aún no siga una secuencia de razonamientos lógicos, no ve la necesidad de hacer razonamientos formales y por lo tanto no entiende cómo funciona el sistema axiomático de las matemáticas.
- **Nivel 4 (Deducción formal):** El estudiante ya es capaz de realizar demostraciones lógicas y formales, se da cuenta que es necesario justificar cada proposición, esto le permite formalizar en sistemas axiomáticos, comprende y relaciona las propiedades. Es capaz de crear una secuencia de proposiciones para deducir una propiedad de otras, pero aún no se da cuenta de la importancia del rigor a la hora de razonar.

- **Nivel 5 (Rigor):** En este nivel el estudiante reconoce que hay diferentes sistemas axiomáticos y los puede comparar entre sí. En este nivel alcanza su mayor rigor y en este punto es capaz de captar la geometría de forma abstracta. (Gamboa, 2013)

Además de plantear estos cinco niveles, los Van Hiele plantearon 5 fases de aprendizaje para cada nivel, que le permiten al docente planear las actividades que va a desarrollar con los estudiantes para que pueden pasar de un nivel a otro. Las fases propuestas son las siguientes:

- **Fase 1 (Información):** En esta fase el profesor les comenta a los estudiantes que van a tratar un nuevo tema, les explica los materiales o herramientas que van a usar. Los estudiantes se familiarizarán con el material y aprenderán los conceptos básicos que necesitan para trabajar con el tema nuevo. En esta fase el docente puede ver que conceptos previos tienen los estudiantes.
- **Fase 2 (Orientación dirigida):** En esta fase el estudiante comienza a explorar el tema que está aprendiendo con la ayuda del material dado, con este hace pequeñas investigaciones y pequeños descubrimientos. Los descubrimientos que realizan les permiten generar relaciones y empiezan la construcción de una red de conocimientos. Los problemas que el profesor plantea deben seleccionarse de manera adecuada para que los estudiantes puedan llegar a los resultados de manera directa que les permitan aprender las propiedades que necesitan. El profesor sólo debe intervenir para orientar a los estudiantes cuando lo necesiten.
- **Fase 3 (Explicitación):** Los estudiantes deben intentar poner en palabras los resultados que han descubierto, deben discutirlos con los compañeros y con el profesor, esto con el fin de afianzar los conceptos aprendidos y que afiancen el vocabulario técnico que se debe manejar en el tema. En esta fase no se produce avance en el conocimiento, sólo se da una revisión a lo aprendido hasta el momento y se adquiere una buena forma de expresar lo aprendido. La idea en esta fase es afianzar la red de conocimientos que se está formando.
- **Fase 4 (Orientación libre):** En esta fase el docente debe plantear problemas diferentes en los que los estudiantes aplicarán todo lo aprendido

(consolidando así todo lo que han aprendido hasta el momento). Los ejercicios planteados por el profesor deben ser más complejos, no deben resolverse de manera directa, sino que deben permitir que los estudiantes creen nuevas relaciones o propiedades. Los ejercicios deben tener varias formas de resolverse, o tener varias soluciones o ninguna. Nuevamente, el profesor debe intentar intervenir de manera mínima, son los estudiantes los que deben intentar resolverlos solos con lo aprendido en la fase 2.

- **Fase 5 (Integración):** Los estudiantes integran los nuevos conocimientos, formas de razonar y estrategias de trabajo con lo que sabían anteriormente, terminando así de construir su nueva red de conocimientos. Para lograr esto el profesor debe organizar con el grupo una recopilación de lo aprendido o motivar a los estudiantes para que realicen resúmenes. Las actividades en esta fase deben ayudar a los estudiantes a organizar todo lo aprendido, para así lograr una visión general del tema de estudio. Lo que se intenta en esta fase es fusionar los conceptos previos con lo aprendido durante las fases del modelo. (Gamboa, 2013)

3.3 Relación del modelo de Van Hiele con la propuesta

Con los talleres que se aplicaron se busca pasar por todas las fases del modelo de Van Hiele. Con esto se busca que los estudiantes refuercen los conocimientos de áreas de figuras planas, las apliquen en la demostración del Teorema de Pitágoras; además, se espera que los estudiantes puedan aprender conceptos de congruencia, semejanza, geometría del circulo, que apliquen el Teorema de Pitágoras en la solución de problemas prácticos y en una demostración del Teorema del seno y del coseno. Por último, se espera que los estudiantes tengan un acercamiento a algunos resultados propuestos pro Fermat relacionados con el Teorema de Pitágoras.

Para la fase de información el profesor indaga por los conceptos previos que los estudiantes tienen acerca del Teorema de Pitágoras y de las temáticas que se desprenden del estudio del mismo, además se hace una explicación de la herramienta digital con la que se trabajará en algunos talleres (Geogebra). Se definen conceptos básicos que se necesitan para trabajar en los siguientes niveles.

En la fase de orientación dirigida, los estudiantes trabajan los talleres de ternas pitagóricas y problemas de aplicación del teorema de Pitágoras. Esto con el fin de comenzar a formar relaciones con los conceptos conocidos y de enunciar propiedades y características de lo visto. Además, los estudiantes, trabajan en algunas demostraciones del teorema de Pitágoras (algunas de las mencionadas en la parte disciplinar de este trabajo), algunas son del tipo rompecabezas y usan material concreto; otros usan herramientas digitales.

En la fase de explicitación los estudiantes llegan a escribir o argumentar las demostraciones del teorema de una forma más rigurosas, para esto usan los conceptos aprendidos durante las dos fases anteriores. También comparten con sus compañeros acerca de las demostraciones que han realizado.

La fase de orientación libre se desarrolla con talleres en los que se usa el Teorema de Pitágoras para llegar a aprender nuevos conceptos, como por ejemplo, las razones trigonométricas; al respecto se dan ideas de como se pueden deducir. También, en esta fase se presentan ejercicios donde se aplica el recíproco del teorema de Pitágoras.

Por último, en la fase de integración se desarrollan ejercicios que ~~le~~ permitan ver la relación del Teorema de Pitágoras con el Teorema de Fermat. Además, se abordan otras pruebas del Teorema de Pitágoras que los estudiantes deben justificar haciendo uso de todo lo aprendido.

3.4 Propuesta Didáctica

La propuesta didáctica consiste en estudiar las temáticas que permiten abordar el Teorema de Pitágoras y algunas temáticas que se derivan del mismo. Para tal fin se proponen una serie de talleres que cuentan con un título, un objetivo y diferentes actividades las cuales le planteaban situaciones similares a los estudiantes para que ellos pudieran sacar una conclusión por si solos, permitiendo así que el aprendizaje sea significativo. Para lograr alcanzar este tipo de aprendizaje no sólo se usa papel y lápiz, sino que también se proponen el usó de otro tipo de materiales que ellos no suelen usar en el desarrollo cotidiano de las clases en el colegio, materiales como: plastilina, cartulinas de colores y el uso de Geogebra. El uso de estos materiales permitió un aprendizaje más dinámico ya que sus clases tradicionales son sólo con papel, lápiz y tablero.

Estos talleres se diseñaron con el fin que el estudiante pudiera desarrollar su pensamiento geométrico. Para esto es necesario de realizar actividades de razonamiento, comunicación y solución de problemas. Todas estas temáticas se desarrollaron en los talleres planteando situaciones de observación para los estudiantes, luego de esto se respondían preguntas cerradas y abiertas; y algunas de estas respuestas debían ser debatidas con sus compañeros. En la parte de razonamiento el estudiante debía justificar algunas demostraciones planteadas y debía realizar algunas construcciones. Por último, en la solución de problemas el estudiante debió solucionar diferentes problemas de aplicación en algunos de los temas tratados. En algunos de los ejercicios se planteaban situaciones diferentes a las situaciones tradicionales planteadas con el fin de ver si realmente se estaban entendiendo los conceptos.

Con los talleres se hizo un recorrido a lo largo de los diferentes conceptos que se necesitan previo a la demostración formal del Teorema de Pitágoras. Se repasó de manera constante algunos conceptos que los estudiantes habían visto al comienzo del año y en años anteriores. En la parte final, se usó el resultado del Teorema de Pitágoras para demostrar otros teoremas de mayor complejidad como el del Coseno y se relacionó con pequeños resultados de la teoría de números.

El alumno fue el centro de los talleres, cada uno tenía autonomía a la hora de desarrollar sus talleres y hasta donde quería indagar acerca de los temas que estaban viendo por primera vez. La labor del docente fue solamente la de orientar y resolver algunas de las dudas que ellos a través del diálogo no pudieron resolver.

Los talleres se pueden clasificar en tres grupos. En un primer grupo están los talleres que aproximan a los estudiantes al teorema de Pitágoras, para esto se usó el estudio de áreas de figuras planas como cuadrados y triángulos, áreas por recubrimientos y construcción de rompecabezas.

Ahora bien, en el segundo grupo a la vez que se estudió dicho teorema, se diseñaron actividades que mostraron diferentes pruebas del teorema de Pitágoras, haciendo uso de herramientas tecnológicas y de conceptos de geometría elemental que se aprendieron en el desarrollo de la propuesta.

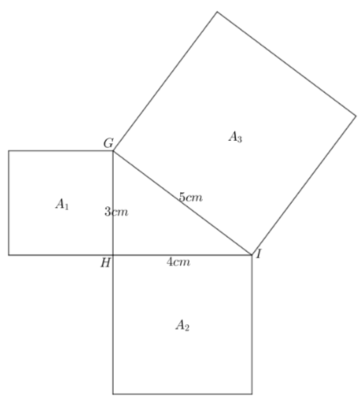
En el tercer grupo de talleres se encuentran los que lograron aproximar a los estudiantes de una manera didáctica a diferentes conceptos tanto de la geometría elemental, de la geometría analítica y la teoría de números. En estos temas los talleres intentan dejar muy claros los conceptos que se estaban enseñando, como todos estos temas eran nuevos para ellos se iniciaba con conceptos sencillos y al final del taller ellos terminaban con una conclusión que formaliza o aplica el concepto aprendido.

3.5 Talleres

3.5.1 Taller 1: El Teorema de Pitágoras y áreas de cuadrados

Objetivo: Realizar un primer acercamiento al Teorema de Pitágoras por medio del cálculo de áreas de cuadrados.

Materiales: Geogebra, lápiz y papel.



Actividad 1

1. En el triángulo GHI se han construido cuadrados sobre sus lados como se muestra en la figura. Calcule las áreas de cada uno de los cuadrados.

$A_1 =$___________________ $A_2 =$___________________

$A_3 =$___________________

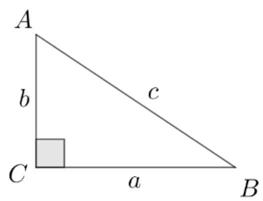
Halle:

$A_1 + A_2 =$___________

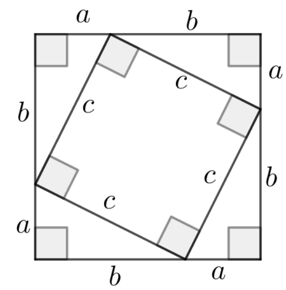
¿Qué puede concluir? ______________________________________

____

2. La figura muestra un triángulo rectángulo de catetos a y b e hipotenusa c.



Se desea encontrar una relación entre la hipotenusa y los catetos del triángulo dado. Para tal fin se construye un cuadrado de lado $(a + b)$ como lo muestra la figura de la derecha.



a) Calcule el área del cuadrado de lado $(a + b)$.

$A =$ _________________________

b) De acuerdo con la construcción que muestra la figura, se han determinado 4 triángulos rectángulos de catetos $a\ y\ b$ y un cuadrado de lado c.

i) Halle el área de cada triángulo que hay dentro de la figura.

$A_{\Delta} =$ _________________________

ii) Halle el área del cuadrado de lado c.

$A \quad =$ _________________________

iii) Sume las áreas de los 4 triángulos y el área del cuadrado pequeño de lado c. ____

c) Nótese que los resultado hallados en **a)** y **iii)** deben ser iguales ¿por qué? Ahora iguale las expresiones obtenidas en **a)** y **b)**, simplifique las expresiones, ¿A que es igual c^2? ________________________________

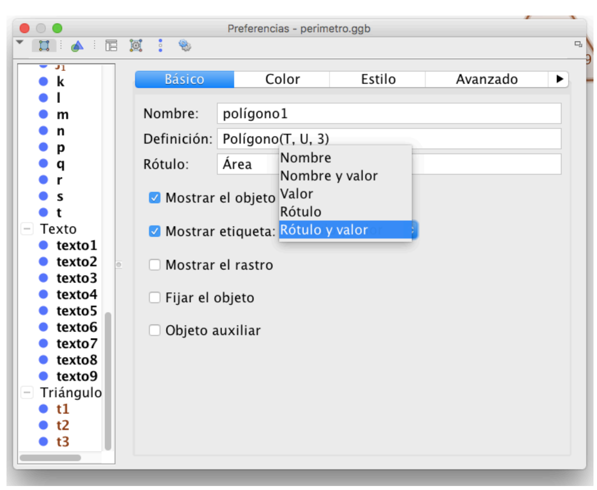
d) De acuerdo con los resultados obtenidos en este ejercicio y en el ejercicio anterior, exprese con sus palabras una conclusión derivada del análisis de estos ejercicios. ____

____

Actividad 2

1. **a)** Usando el programa Geogebra, dibuje un triángulo de lados 6, 8 y 10 con la opción “polígono”.

b) Use la opción “ángulo” y halle la medida de cada ángulo. De acuerdo a las medidas de sus ángulos, ¿qué clase de triangulo se ha construido?______________



c) Use la opción “polígono regular” para dibujar sobre cada lado del triángulo un cuadrado de longitud igual al lado.

d) Haga click sobre cada uno de los cuadrados construidos y en la opción “propiedades” seleccione “básico”. En la parte de “Rótulo” escriba “área” y en la parte de “mostrar etiqueta” seleccione “rótulo y valor” como se ve en la imagen.

e) Escriba el área de cada uno de los cuadrados: ______________________________.

f) Halle una relación entre las áreas de los cuadrados sobre los catetos y el área del cuadrado sobre la hipotenusa____
____.

g) Complete $10^2 = 6^2 +$ ______.

2. Usando el programa Geogebra, dibuje un triángulo de lados 5, 12 y 13 con la opción “polígono” y repita los pasos a)-g) del ejercicio 1 de esta actividad.

Repita el paso a)

b) De acuerdo a las medidas de sus ángulos, ¿qué clase de triángulo se ha construido? ______________

Repita el paso c) y d)

e) Escriba el área de cada uno de los cuadrados: __________________________________

f) Escriba una relación entre las áreas de los cuadrados sobre los catetos y el área del cuadrado sobre la hipotenusa ________________________________
____

g) $13^2 = 5^2 +$ ______.

3. Usando el programa Geogebra, dibuje un triángulo de lados 7, 10 y 12 con la opción “polígono”. Repita los pasos de a) – e) del ejercicio 1 de esta actividad.

Repita el paso a)

b) De acuerdo a las medidas de sus ángulos, ¿qué clase de triángulo se ha construido? ______________

Repita el paso c) y d)

g) Escriba el área de cada uno de los cuadrados: __________________________________

h) Escriba una relación entre las áreas de los cuadrados sobre los catetos y el área del cuadrado sobre la hipotenusa ________________________________
____

4. ¿Existe alguna relación entre las áreas de los cuadrados determinados?

____

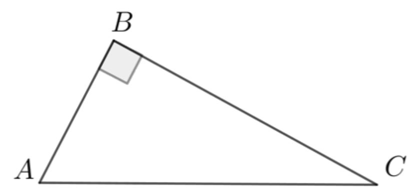
5. Escriba con sus palabras una conclusión relacionada con este ejercicio

____

3.5.2 Taller 2: El Teorema de Pitágoras y los rompecabezas

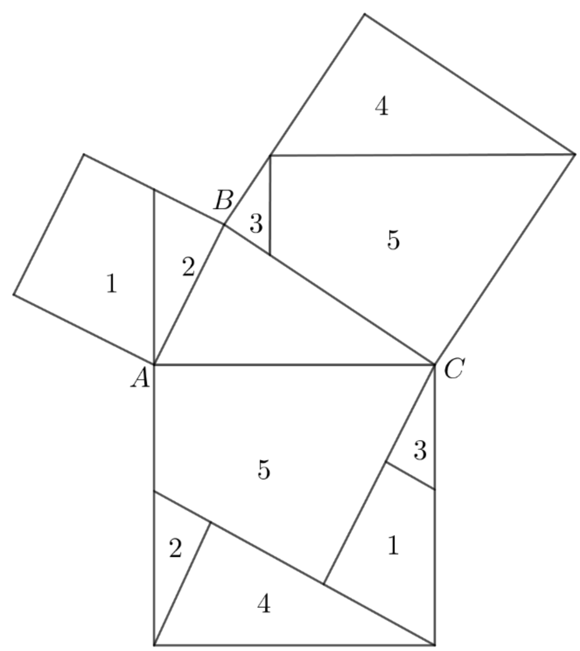
Objetivo: Realizar demostraciones del Teorema de Pitágoras usando áreas por recubrimientos en la construcción de rompecabezas.

Materiales: Cartulinas de colores, regla y tijeras



Actividad

1. Construya en una cartulina un triángulo rectángulo ABC como se muestra la figura de longitudes $AB = 5\ cm, BC = 12\ cm\ y\ AC = 13\ cm.$ Luego dibuje cuadrados sobre los lados del triángulo como se muestra en la figura de abajo.



Siga los siguientes pasos para construir el rompecabezas.

a) En el cuadrado $ABFG$ contruido sobre $\overline{AB}$ prolongue el segmento $\overline{AD}$ de tal forma que esta prolongación corte a $\overline{FB}$ en un punto M. Así, se forman las regiones 1 y 2 que muestra la figura.

b) En el cuadrado $BCHI$ construido sobre $\overline{BC}$ trace el segmento de recta que pase por H y vaya hasta el lado $\overline{BI}$ (el punto de intersección será J) de tal forma que $\overline{JH} \parallel \overline{AC}$.

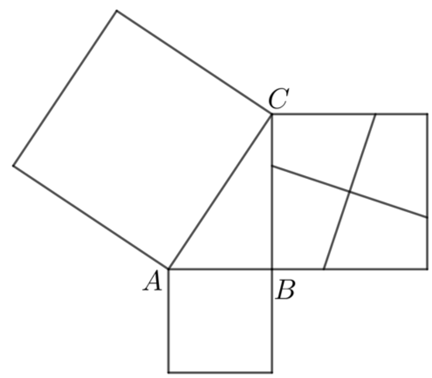
c) En el mismo cuadrado del punto b) trace la recta m que sea perpendicular a $\overline{JH}$ que pase por J y que corte el lado BC, el punto de intersección lo llamamos L. Con los pasos b) y c) se forman las regiones 3, 4 y 5 de la figura.

d) Recorte estas 5 regiones que ha formado.

e) Organice estas 5 piezas sobre el cuadrado construido sobre la hipotenusa de manera tal que las 5 figuras cortadas cubran completamente el cuadrado 6 que muestra la figura y finalmente pegue las figuras sobre el cuadrado 6.

f) En la guía de trabajo dibuje sobre la región 6 el cubrimiento realizado con las regiones del 1-5.

2. Dibuje un triángulo rectángulo ABC de las longitudes que usted quiera, luego dibuje cuadrados sobre sus lados como se muestra en la figura.



a) En el cuadrado sobre $\overline{BC}$ trace dos segmentos $\overline{JK}\ y\ \overline{ML}$ que atraviesen el cuadrado, como lo muestra la figura, de tal manera que $EJ = DM = BK = CL$.

b) Recorte las piezas que formó en la parte a).

c) Organice las piezas de la parte b) y el cuadrado $ABGF$ sobre el cuadrado de la hipotenusa $ACHI$ de tal forma que las 5 piezas cubran ese cuadrado. Pegue las figuras sobre el cuadrado $ACHI$.

d) En la guía de trabajo dibuje sobre el cuadrado $ACHI$ el cubrimiento hecho sobre el cuadrado de la hipotenusa.

3. ¿Qué conclusión puede obtener después de hacer estas dos construcciones?

____

____

4. **¡Acepta el reto!** Construya otro triángulo rectángulo y dibuje cuadrados sobre sus lados, crea una nueva división para los cuadrados sobre los catetos de tal forma que con las regiones que creo pueda cubrir el cuadrado que está sobre la hipotenusa. Dibuje aquí el nuevo rompecabezas que acaba de crear.

3.5.3 Taller 3: El Teorema de Pitágoras y la congruencia de polígonos

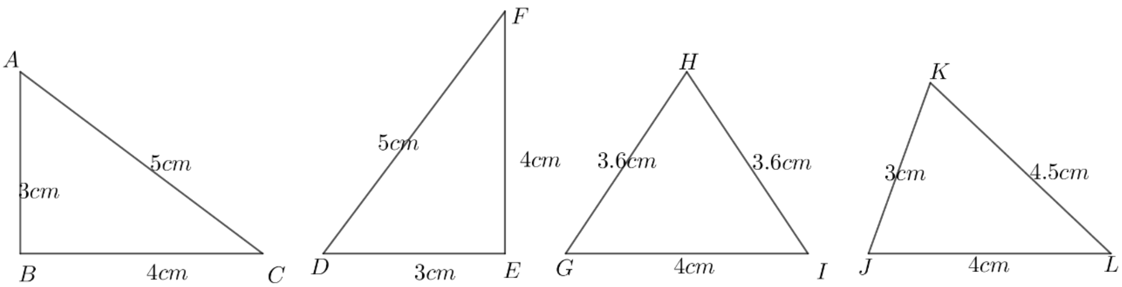
Objetivo: Realizar una demostración del Teorema de Pitágoras haciendo uso de congruencias de polígonos y de áreas por recubrimientos.

Introducción:

Intuitivamente dos polígonos son congruentes si uno de ellos se puede superponer en el otro. De manera un poco más formal, dos polígonos son congruentes si sus lados correspondientes son congruentes, esto es tienen la misma medida, y sus ángulos correspondientes son congruentes, es decir tienen la misma medida.

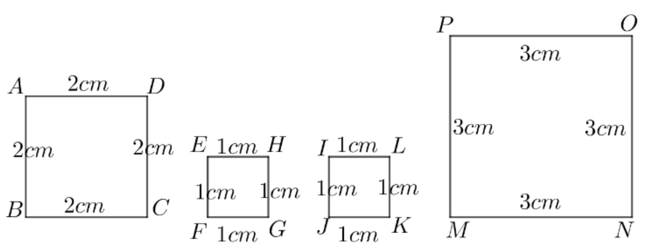
1. En cada caso determine cuales figuras son congruentes.

a)



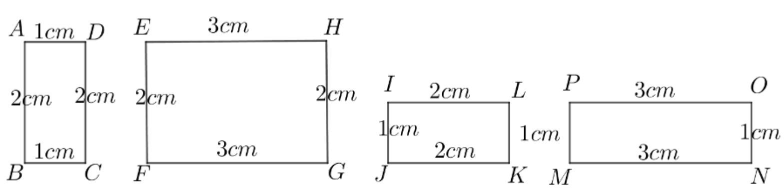
–
–
–
____

b)



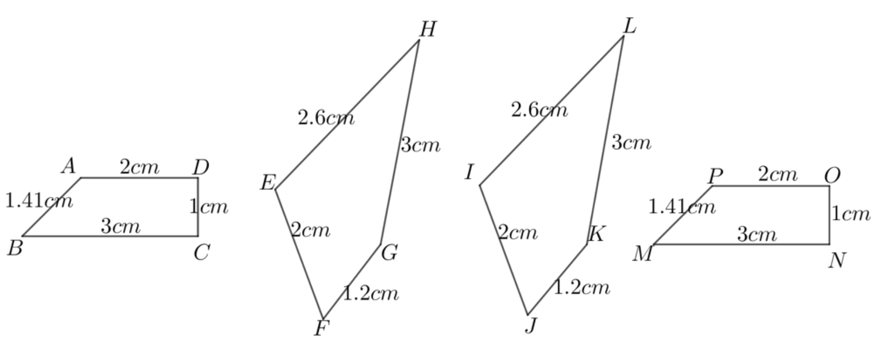
____

c)



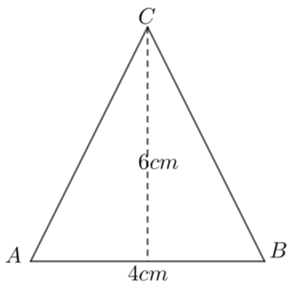
____

d)



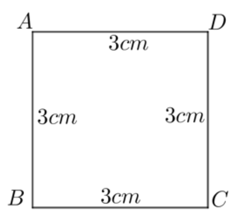
____

2. Dibuje un triángulo congruente con el triángulo ABC de base $AB = 4\ cm\ y\ h = 6\ cm$. Calcule el área de cada triángulo y compárelas.



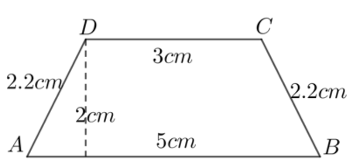
$A_{ABC} =$ __________ $A_{A'B'C'} =$ ______________

3. Dibuje un cuadrado congruente con el cuadrado $ABCD$ de lado $AB = 3\ cm$. Calcule las áreas de los dos cuadrados y compárelas.



$A_{ABCD} =$ __________ $A_{A'B'C'D'} =$ ______________

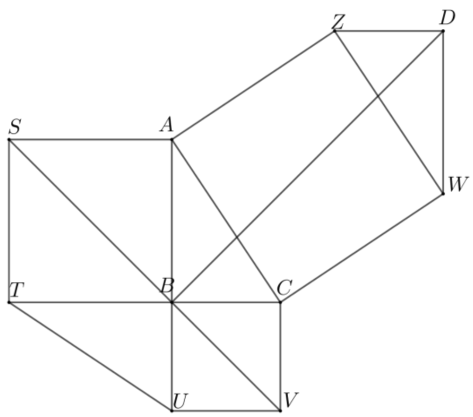
4. Dibuje un trapecio congruente con el trapecio $ABCD$ de base menor $CD = 3\ cm$, base mayor $AB = 5\ cm$. Calcule las áreas de los dos trapecios y compárelas.



$A_{ABCD} =$ __________ $A_{A'B'C'D'} =$ ______________

5. ¿Qué puede decir acerca de las áreas de dos cuadrados congruentes? ______________ ¿Qué puede decir acerca de las áreas de dos paralelogramos congruentes? ______________ y ¿Qué puede decir acerca de las áreas de dos triángulos congruentes? _______________.

6. Construya la figura que se muestra a continuación dos veces en cartulina.



a) Para esto, construya un triángulo rectángulo ABC.

b) Dibuje cuadrados sobre cada uno de sus lados, sobre $\overline{AB}$ construya un cuadrado $ASTB$.

c) Trace el segmento $\overline{TU}$, note que se forma un triángulo TBU.

d) Trace $\overline{DW}$ de manera que se cumpla: $\overline{DW} \parallel \overline{AB}$ y que $DW = AB$.

e) Trace $\overline{DZ}$ de manera que cumpla: $\overline{DZ} \parallel \overline{BC}$ y que $DZ = BC$.

f) En una cartulina recorte los cuadriláteros $DZAB, DWCB$ y en la otra cartulina recorte los cuadriláteros $SACV\ y\ STUV$. Compárelos y trate de superponer uno en el otro, para luego responder a la pregunta ¿Cuáles cuadriláteros son congruentes?____

g) ¿Qué otras figuras son congruentes y por qué?____

____

____

____

____________________________________.

h) Corte los triángulos ABE del cuadrilátero $DZAB$ y el triángulo BCE del cuadrilátero $DWCB$.

i) Corte el triángulo ABC del cuadrilátero $SACV$.

j) ¿Puedes armar un rompecabezas? ________ ¿qué conclusión puede obtener después de hacer este proceso? ____

3.5.4 Taller 4: Ternas pitagóricas

Objetivo: Estudiar diferentes formas de determinar ternas pitagóricas.

Materiales: Lápiz y papel

Una terna pitagórica consiste de tres enteros positivos que corresponden a los lados de un triángulo rectángulo. Por ejemplo $5, 12\ y\ 13$ es una terna pitagórica, lo cual se verifica a continuación: $5^2 = 25$, $12^2 = 144$, $13^2 = 169$, y $25 + 144 = 169$, luego $5^2 + 12^{\ 2} = 13^2$; por lo tanto $5, 12\ y\ 13$ son los lados de un triángulo rectángulo. Ahora, $6, 7\ y\ 8$ no es una terna pitagórica, puesto que $6^2 + 7^2 = 8^2$.

Actividad 1

1. Sea n un entero positivo. Considere las ternas de la forma $3n, 4n\ y\ 5n$. Dando valores a n se obtienen ternas de enteros positivos. Así, por ejemplo, si $n = 2$, se obtiene la terna $6, 8\ y\ 10$; nótese que $6^2 + 8^2 = 10^2$, asi que $3, 4\ y\ 5$ es una terna pitagórica. De acuerdo con esta idea complete:
   a. Si $n = 3$, se obtiene la terna _____, _____ y _____.
   b. Si $n = 4$, se obtiene la terna _____, _____ y _____.
   c. De otros valores a n y obtenga otras 3 ternas. En cada caso determine si las ternas halladas son ternas pitagóricas.

      _____, _____ y _____

      _____, _____ y _____

      _____, _____ y _____
   d. Complete la demostración de que las ternas de la forma $3n, 4n\ y\ 5n$ son en general ternas pitagóricas.

      $(3n)^2 = 9n^2$
      $(4n)^2 =$ _____
      $(5n)^2 =$ ______

¿Qué puedes concluir? ____________________________________ .

2. Los chinos encontraron un modelo para encontrar otra terna pitagórica diferente a las anteriores. Ese modelo es: $a = mn$, $b = \frac{1}{2}(m^2 - n^2)$ y $c = \frac{1}{2}(m^2 + n^2)$, siendo $m\ y\ n$ enteros positivos, ambos pares o ambos impares, con mayor $m > n$. En este caso, $a\ y\ b$ representan las longitudes de los catetos del triángulo y c la hipotenusa. De acuerdo con esto encuentre 3 ternas y en cada caso verifique que estas son ternas pitagóricas.
   a) _____, _____ y _____
      _____, _____ y _____
      _____, _____ y _____

   b) Demuestre que la terna mencionada en el este ejercicio es en general una terna pitagórica.

Nota: Nótese que la parte b) está diciendo que sin importar los valores de $m\ y\ n$, con $m\ > n$, la terna encontrada corresponde a los lados de un triángulo rectángulo, solo que para nuestro caso no necesariamente con valores arbitrarios de m y n se producen ternas pitagóricas.

c) Hallar ternas para los valores de $m\ y\ n$ indicados y en cada caso verifique que los valores de a, b y c encontrados corresponden a los lados de un triángulo rectángulo.

(i) $m = 2\ y\ n = 1$ ______ , _______ y _______

(ii) $m = 4\ y\ n = 3$ ______, _______ y _______

3. El matemático y filósofo griego Platón (427-347 a.C.), fundador de la Academia, también encontró fórmulas para encontrar ternas pitagóricas, estas fueron: $a = 2m, b = m^2 - 1\ y\ c = m^2 + 1,$ siendo m un entero positivo mayor que 1. Encuentre 3 ternas con estas nuevas fórmulas y en cada caso verifique que son ternas pitagóricas.

a)____, ____ y ____

____, ____ y ____

____, ____ y ____

b) Demuestre que la terna mencionada en el este ejercicio es en general una terna pitagórica.

4. La escuela de los pitagóricos, fundada por Pitágoras en el S. VI a.C., planteó también sus fórmulas, muy similares a las de Platón, estas fueron: $a = m, b = \frac{m^2-1}{2}\, y\, c = \frac{m^2+1}{2}$ con m un número impar. ¿Por qué m debe ser impar? ____

a) Encuentre 3 ternas pitagóricas con las fórmulas de los pitagóricos.
____, ____ y ____
____, ____ y ____
____, ____ y ____

b) Demuestre que la terna mencionada en el este ejercicio es en general una terna pitagórica.

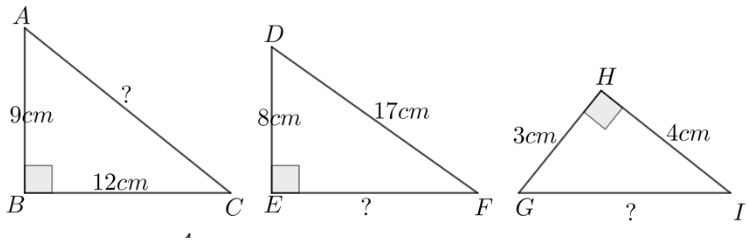
5. ¿Algunas de las ternas que ha encontrado se puede encontrar con las cuatro fórmulas vistas? ________ ¿Cuál? ___________¿Existirán más ternas que coincidan en todos las fórmulas?_____ , en caso afirmativo de un ejemplo___________________
6. ¿Cuáles de las siguientes ternas corresponden a los lados de un triángulo rectángulo?
   a) 6, 8 y 10
   b) 7, 4 y 6
   c) 15, 10 y 12
   d) 5, 12 y 13
   e) 8, 9 y 16

3.5.5 Taller 5: Aplicaciones del Teorema de Pitágoras

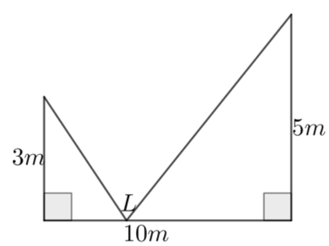
Objetivo: Aplicar el Teorema de Pitágoras en la solución de problemas de aplicación.

Actividades: Resolver los siguientes problemas aplicando el Teorema de Pitágoras.

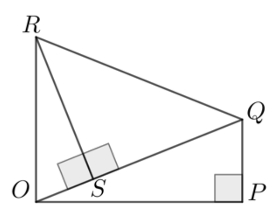
1. Encuentre los lados que faltan en cada triángulo rectángulo.



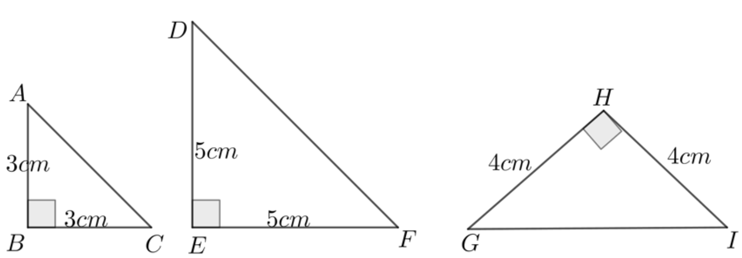
2. Un árbol de 50 metros de alto se cae sobre un edificio de 70 metros. La distancia que separa al árbol del edificio es de 18 metros. Halle el punto en que el árbol choca con el edificio.
3. Hay un bambú de diez pies de altura, que se ha roto de tal manera que su extremo superior se apoya en el suelo a una distancia de tres pies de la base. Calcule la altura a la que se ha producido la rotura.
4. Un observador se para a 4 metros de la base de un edificio y ve hacia la punta del edificio donde hay una bandera. La distancia que separa al observador de la bandera es 3 metros más que el doble de la altura del edificio. Encuentre la altura del edificio.
5. La diagonal de un cuadrado mide $18\, cm$. Halle la medida de los lados del cuadrado.
6. Dos torres telefónicas de $3\, m$ y $5\, m$ de altura están separadas a $10\, m$. Se quiere poner un cable que vaya de la punta de cada torre a un punto en el suelo. Encuentre la longitud mínima del cable que se debe usar para poder unir las torres con el suelo.



7. Calcule el perímetro y el área de la siguiente figura si se sabe que $PQ = 2 \;\; QR = 10\, , RS = 6 \;\; y \; OS = 2$.



8. Encuentre la hipotenusa de cada uno de los triángulos.



¿Qué característica tienen los triángulos? ____________________________

¿Qué característica tienen las hipotenusas de estos triángulos? ____

Escriba una conclusión derivada de este ejercicio ____.

3.5.6 Taller 6: Los números reales y la recta numérica

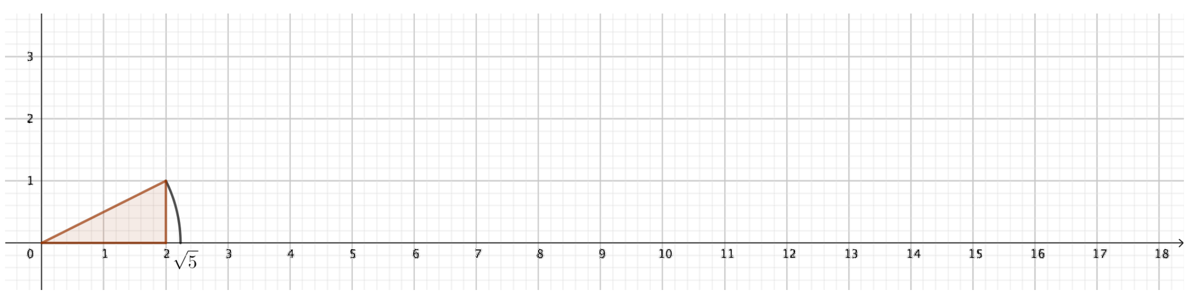
Objetivo: Ubicar números reales en la recta numérica.

Materiales: Regla y compás.

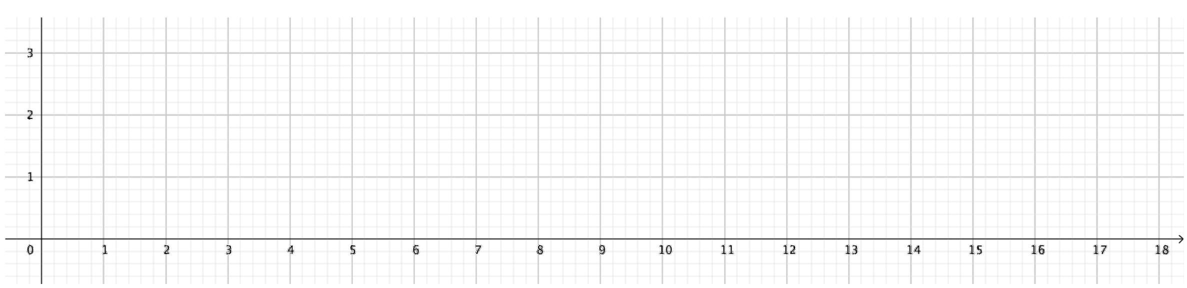
Es mucho lo que se puede decir acerca de los números reales, pero en este taller se pretende introducir la ubicación de algunos números reales sobre la recta numérica.

Actividad 1

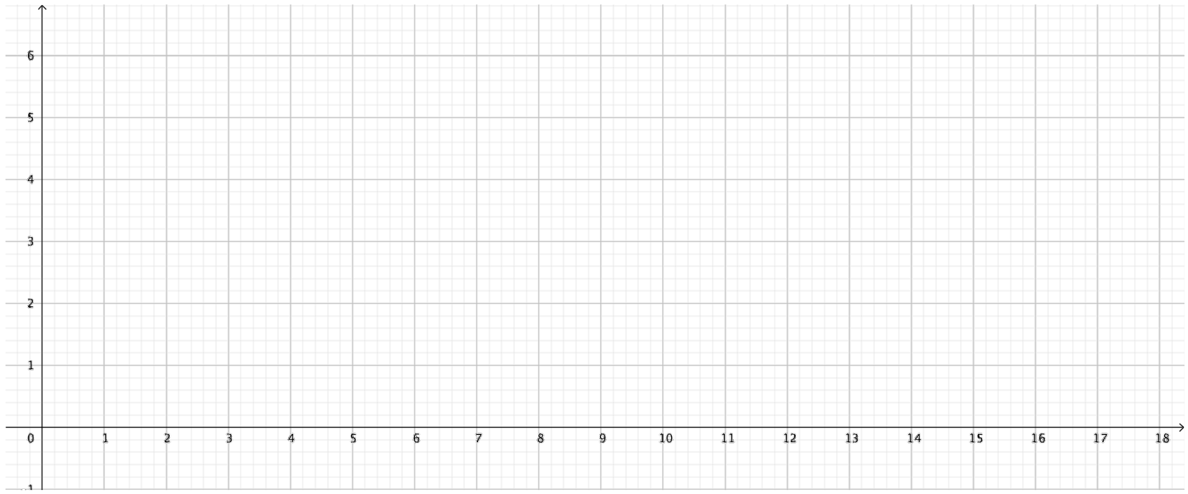
1. Sobre la cuadrícula, construya tres triángulos rectángulos cada uno de ellos con un cateto de medida 1, como el que muestra el ejemplo dado en la figura. Encuentre la medida de la hipotenusa de cada triángulo. Ahora traslade la medida de la hipotenusa de cada triangulo a la recta numérica, trazando un arco con centro en cero y radio igual a la hipotenusa de cada uno de los triángulos, como lo ilustra la figura. El punto en donde se corte el arco y la recta numérica será el punto que le corresponde a ese número en la recta.



2. Sobre la cuadrícula, construya un triángulo rectángulo de catetos 2 y 3. Halle la hipotenusa y ubique en la recta numérica su medida.



3. **¡Acepta el siguiente reto!** En la recta numérica ubique la raíz cuadrada de 12.



4. Construya ahora triángulos de distintas alturas y repita el proceso del punto 1, haga esto con 5 triángulos diferentes y organice las raíces obtenidas de menor a mayor.

3.5.7 Taller 7: Triángulos equiláteros sobre triángulos rectángulos

Objetivo: Relacionar las áreas de los triángulos equiláteros construidos sobre los lados de un triángulo rectángulo.

Materiales: Geogebra, lápiz y papel

Actividad 1

1. Dibuje un triángulo equilátero de lado 4 cm, luego encuentre los valores que se piden a continuación.

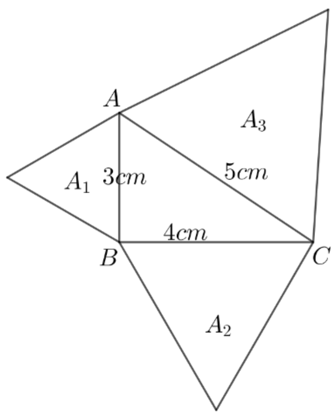
- Su altura___________
- Su área. ____________

2. En la figura se han dibujado triángulos equiláteros sobre los lados del triángulo rectángulo ABC, donde $AB = 3\ cm, BC = 4\ cm\ y\ \ AC = \ 5cm$

a) Verifique que efectivamente el triángulo ABC es rectángulo.

b) Halle la altura de cada triángulo equilátero.

c) Halle el área de cada triángulo equilátero.



$A_1 =$___________________

$A_2 =$___________________

$A_3 =$___________________

$A_1 + \ A_2 =$ _______________

3. Construya un triángulo rectángulo de catetos $5\ cm, 12\ cm\ y\ 13\ cm$, luego construya triángulos equiláteros sobre sus lados y halle las áreas de cada triángulo equilátero construido.

$A_1 =$___________________

$A_2 =$___________________

$A_3 =$___________________

$A_1 + \ A_2 =$ _______________

4. Construya un triángulo rectángulo de catetos $6\ cm\ y\ 6\ cm$. Construya triángulos equiláteros sobre sus lados y halle las áreas de cada triángulo equilátero construido.

$A_1 =$___________________

$A_2 =$____________________

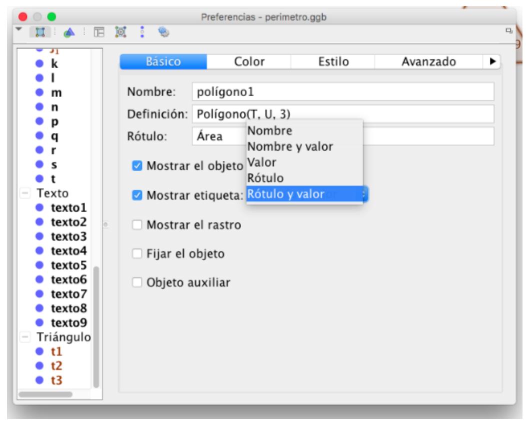
$A_3 =$____________________

$A_1 + \ A_2 =$ _______________

Actividad 2

1. a) Usando el programa Geogebra dibuje un triángulo rectángulo rectángulos diferentes con la opción “polígono”.

b) Use la opción “polígono regular” para construir sobre los lados del triángulo triángulos equiláteros.



c) Haga click sobre cada una de las figuras y seleccione la opción “propiedades” y seleccione “básico”. En la parte de “Rótulo” escriba “área” y en la parte de “mostrar etiqueta” seleccione “rótulo y valor” como se ve en la imagen.

d) Verifique si el área del triángulo equilátero sobre la hipotenusa es igual a la suma de los dos triángulos equiláteros sobre los catetos.

2. Construya otro triángulo rectángulo y repita los pasos del ejercicio anterior

3. ¿Qué puedes concluir después de haber desarrollado las actividades 1 y 2?

____

____

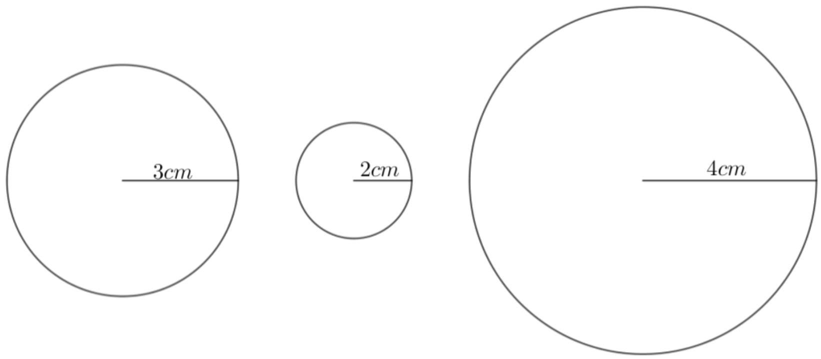
3.5.8 Taller 8: Círculos sobre triángulos rectángulos

Objetivo: Relacionar las áreas de los semicírculos construidos sobre los lados de un triángulo rectángulo.

Materiales: Geogebra, lápiz y papel

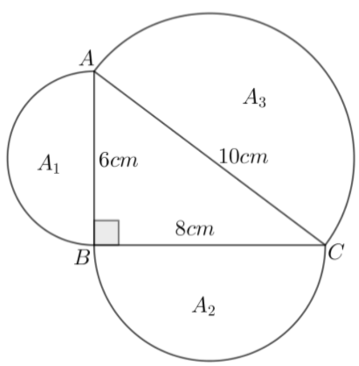
Actividad 1

1. Halle el área de cada uno de los siguientes círculos.



A_1= _______________ A_2= ___________________ A_3= _____________

2. En el triángulo rectángulo ABC se han construido sobre sus lados semicírculos, como se muestra en la figura. Verifique que efectivamente el triángulo ABC es rectángulo y luego, calcule las áreas de cada uno de los semicírculos.



A_1 =___________________

A_2 =___________________

A_3 =___________________

¿Qué relación cumple A_3 con A_1 y A_2?_______________________________

3. Construya un triángulo rectángulo de lados 3cm, 4cm y 5cm. Luego construya semicircunferencias sobre los lados del triángulo de tal manera que sus diámetros sean los lados del triángulo dado y halle las áreas de cada semicírculo.

A_1 =___________________

A_2 =___________________

A_3 =___________________

¿Se cumple la misma relación del ejercicio anterior? _________________

4. Repita el proceso del ejercicio anterior con un triángulo rectángulo de lados $4{,}5\ cm, 6\ cm\ y\ 7{,}5\ cm$.

$A_1 =$ ___________________

$A_2 =$ ___________________

$A_3 =$ ___________________

¿Se cumple la misma relación del ejercicio anterior? _________________

Actividad 2

1. a) Usando Geogebra construya un triángulo rectángulo, luego halle el punto medio de cada lado del triángulo y con la opción “circunferencia” escoja “arco de circunferencia” y dibuje semicircunferencias de diámetro igual al lado del triángulo.

b) Haga click sobre cada una de las figuras y seleccione la opción “propiedades” y seleccione “básico”. En la parte de “Rótulo” escriba “área” y en la parte de “mostrar etiqueta” seleccione “rótulo y valor”.

c) ¿El área de cada semicircunferencia sobre la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de las semicircunferencias sobre los catetos? ____________________.

2. Construya otro triángulo rectángulo y repita los pasos del ejercicio anterior.

3. ¿Qué puedes concluir después de haber desarrollado las actividades 1 y 2?

____

____

3.5.9 Taller 9: Polígonos regulares sobre triángulos rectángulos

Objetivo: Relacionar las áreas de los polígonos regulares construidos sobre los lados de un triángulo rectángulo.

Actividad 1

Teóricamente todo polígono regular se puede inscribir en una circunferencia. Para construir un polígono regular de lados n, se dibujan en una circunferencia ángulos centrales de medida $360°/n$ y se unen los puntos de corte de los ángulos con la circunferencia.

Con esta idea, construya un triángulo equilátero, un cuadrado, un pentágono regular, un hexágono regular y un octágono regular.

Luego complete la siguiente tabla:

Polígono regular	**Número de lados**	**Medida de cada ángulo interior**
Triángulo equilátero		
Cuadrado		
Pentágono regular		
Hexágono regular		
Octágono regular		

Actividad 2

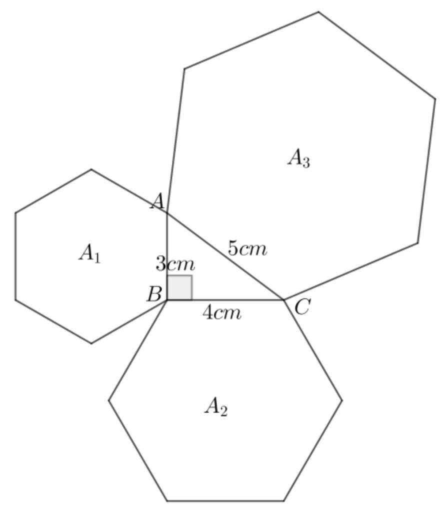
1. Dibuje una circunferencia de 6 cm de radio y un hexágono regular inscrito en la circunferencia.

¿Cuál es la medida del lado?:_________

Halle el valor de la apotema: ___________

Halle el área del hexágono: ___________

2. Se dibujan hexágonos sobre los lados del triángulo ABC Si $AB = 3cm, BC = 4cm$ y $AC = 5cm$. Calcule las áreas de cada uno de los hexágonos y complete lo que se pide.



A_1 =__________________

A_2 =__________________

A_3 =__________________

Verifique: $A_1 + A_2 = A_3$

________+________=_________

Actividad 3

1. a) Usando el programa Geogebra dibuje un triángulo rectángulo con la opción "polígono".

b) Use la opción "polígono regular" para construir sobre los lados del triángulo pentágonos.

c) Haga click sobre cada una de las figuras y seleccione la opción "propiedades" y seleccione "básico". En la parte de "Rótulo" escriba "área" y en la parte de "mostrar etiqueta" seleccione "rótulo y valor".

d) ¿Cuál es la relación que cumplen las áreas de los pentágonos sobre los catetos y el área del pentágono sobre la hipotenusa? ____

____

2. Construya otro triángulo rectángulo y repita el ejercicio 1 con ¿se cumple la misma relación del ejercicio anterior? ___________________________

3. Construya otro triángulo rectángulo y repita el ejercicio 1 con otro polígono regular diferente a los trabajados y responda: ¿qué polígono dibujo? _________

¿Sigue cumpliéndose la relación del ejercicio 1 y 2? _______________________

4. ¿Qué puede concluir luego de hacer la actividad 1 y 2? ____

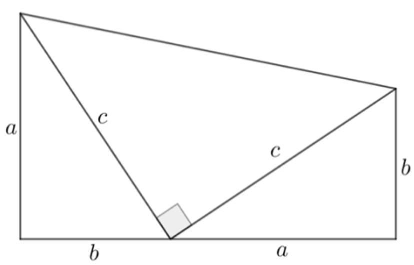
____

3.5.10 Taller 10: Pasando a la formalidad del Teorema de Pitágoras

Objetivo: Demostrar el Teorema de Pitágoras de una manera más formal usando la estructura de la demostración de la forma razón-justificación.

Actividad 1

1. Con dos triángulos rectángulos de catetos a y b e hipotenusa c, como el que se muestra en la figura, se ha construido un trapecio que se termina de formar con un triángulo rectángulo de catetos c.



a) Calcule el área del trapecio de base mayor a y base menor b. $A =$ ___________

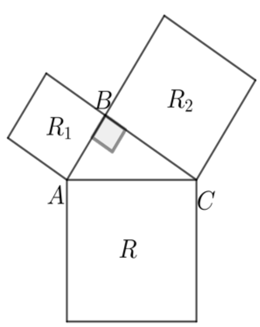
b) Calcule el área de los triángulos que conforman al trapecio $A_1 =$ ___________, $A_2 =$ ___________ y $A_3 =$ ___________

c) Reemplace: $A = A_1 + A_2 + A_3$

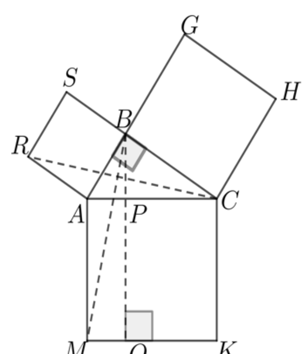
d) Por último, despeje c^2= _____________

2. Sobre los lados del triángulo rectángulo ABC se han construido cuadrados como lo muestra la figura.

Complete



$aR = aR_1 + aR_2$



$a\square ABSR = a\square AMQP$

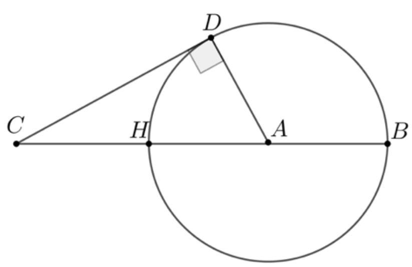
- ¿Por qué $\angle RAC$ $\angle BAM$?____
- ¿Por qué es $\Delta RAC \cong \Delta BAM$?______________________________________
- ¿Por qué el $a\Delta RAC = a\,\Delta BAM$?____________________________________
- ¿AB es una altura de ΔRAC?______________________________________

- ¿Por qué es $a\square ABSR = 2a\Delta RAC$?________________________________
- ¿Es $a\square AMPQ = 2a\Delta BAM$?______________________________________
- ¿Por qué $a\square ABSR = a\square AMPQ$?__________________________________
- ¿Es $a\square BHGC = a\square PQKB$?_____________________________________
- ¿Es $a\square AMKC = a\square AMQP + a\square PQKC$?¿Por qué?____________________

Conclusión: ____

Actividad 2

En la figura, el triángulo ADC es rectángulo con ángulo recto en D y $\overline{CD}$ es tangente a la circunferencia de centro A y radio $\overline{AD}$.



Complete:

Afirmación	**Justificación**
1. $\overline{CD}$ $es\ tangente$	________________________________
2. $\overline{AD} \perp \overline{CD}$	________________________________
3.__________________	Por el teorema de la potencia
4. $CH = AC - AH = AC - AD$	________________________________
5. $CB = AC + AB = AC +$ ___	________________________________
6.______________________	Reemplazando en la ecuación original
7. $AC^2 - AD^2 = CD^2$	________________________________
8. ______________________	Al despejar AC.

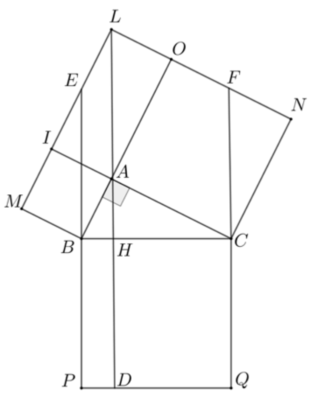
Conclusión:

____

Actividad 3

Sobre los lados del triángulo rectángulo ABC se han construido cuadrados como lo muestra la figura.

Complete lo que sea necesario. Se construyen cuadrados sobre los lados del triángulo ABC.



Afirmación	Justificación
Se traza $\overline{AH}$ y se prolonga hasta $L\ y\ D$	____________________
$\Delta ABC \cong \Delta OLA \cong \Delta IAL$	____________________
$LA = BC = HD$	____________________
$a\ ABEL = a\ BHPD = a\ ABMI$	____________________
$a\ BHPD = \ a\ ABMI$	____________________
$a\ ACNO = a\ HCQD$	____________________
$a\ BPQC = a\ ABMI + a\ ACNO$	____________________

Conclusión

____

3.5.11 Taller 11: Semejanza de triángulos

Objetivo: Identificar figuras semejantes y sus características.

Materiales: Cartulinas y regla.

Actividad 1

1. Construya un triángulo equilátero ABC de lado $6\ cm$. Mida sus ángulos y registre sus medidas $m\angle A =$_______, $m\angle B =$_______ y $m\angle C =$_______. Ahora construya otro triángulo equilátero $A'B'C'$ de lados $18\ cm$. Nuevamente mida sus ángulos y registre sus medidas $m\angle A' =$_______, $m\angle B' =$_______ y $m\angle C' =$_______.
2. Responda:
   - ¿Qué relación tienen los ángulos de los dos triángulos? ____________________.
   - Escriba los siguientes cocientes: $\frac{AB}{A'B'} = -$, $\frac{BC}{B'C'} = -$ y $\frac{AC}{A'C'} = -$.
   - ¿Qué relación tienen los cocientes anteriores? ____.
   - ¿Los triángulos son semejantes? ____________________________.
3. Construya un triángulo rectángulo ABC, con $AB = 6\ cm, BC = 6\ cm\ y\ AC = 6\sqrt{2}$. Mida sus ángulos y registre sus medidas $m\angle A =$_______, $m\angle B =$_______ y

$m\angle C =$_______. Ahora construya otro triángulo rectángulo $A'B'C'$ con $AB = 4\ cm, BC = 4\ cm\ y\ AC = 4\sqrt{2}$. Nuevamente mida sus ángulos y registre sus medidas $m\angle A' =$_______, $m\angle B' =$_______ y $m\angle C' =$_______.

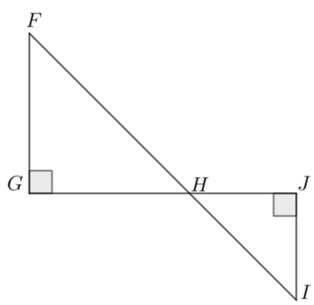
4. Responda:

- ¿Qué relación tienen los ángulos de los dos triángulos? ____________________.
- Escriba los siguientes cocientes: $\frac{AB}{A'B'} = -$, $\frac{BC}{B'C'} = -$ y $\frac{AC}{A'C'} = -$.
- ¿Qué relación tienen los cocientes anteriores? ____.
- ¿Los triángulos son semejantes? ___________________________.

Actividad 2

En cada caso verificar si los triángulos de cada figura, son semejantes y en caso afirmativo calcular las medidas de los segmentos que se piden.

1.

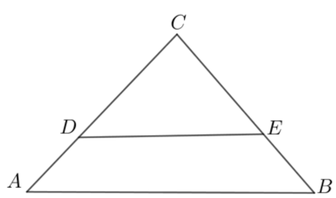


$FG = 8\ cm$, $GH = 6\ cm$ y $HJ = 3\ cm$.

Son semejantes: _______ ¿por qué?_________

$FH =$ ______, $IJ =$ _______ y $HI =$ _________

2.

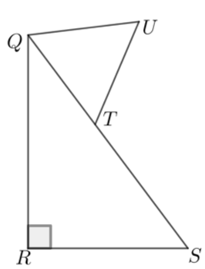


$CD = 6\ cm$, $CA = 10\ cm$, $CE = 4\ cm$ y $CB = 7\ cm$.

Son semejantes: _______ ¿por qué?_________

$CE =$ ______ $AB =$ ________

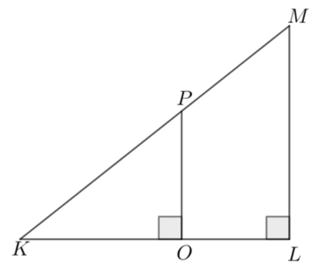
3.



$QU = QT = UT = 4\ cm,\ QS = 9\ cm\ y\ QR = 5\ cm$

Son semejantes: _______ ¿por qué?_________

4.



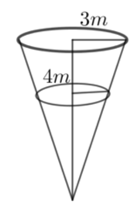
$KO = 2\ cm, OL = 4\ cm\ y\ OP = 3\ cm.$

Son semejantes: _______ ¿por qué?_________

$KP =$ _____, $KM =$ ______ y $ML =$ _________

Actividad 3

1. Una persona camina alejándose de un edificio de 15m de altura hasta que nota que su sombra y la del edificio terminan en el mismo punto. Si su sombra mide 2 m en ese momento del día, la persona está ubicada a 16 m del edificio. ¿Cuál es la altura de la persona?
2. Un tanque de forma cónica de radio 3 m y altura 4 m, tiene agua que alcanza los dos metros de altura, como lo muestra la figura. ¿Cuál es el radio del cono formado por el agua?



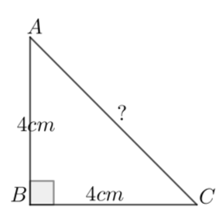
3. Los lados de un triángulo rectángulo ABC guardan una relación de 3: 2 con los lados de otro triángulo $A'B'C'$. Si $AB = 5, BC = 12\ y\ AC = 13.$ Halle las medidas de los lados del triángulo $A'B'C'$.

3.5.12 Taller 12: De los triángulos rectángulos a las razones trigonométricas

Objetivo: Definir las razones trigonométricas a partir de la semejanza de triángulos rectángulos.

Actividad 1

1. a) Encuentre la hipotenusa del triángulo rectángulo que muestra la figura y complete la tabla.



$Razón$	ΔABC

$\frac{cat.\,vertical}{hipotenusa}$	
$\frac{cat.\,horizontal}{hipotenusa}$	
$\frac{cat.\,vertical}{cat.\,horizontal}$	

b) Triplique las medidas del triángulo ABC para obtener el triángulo HIJ, haga un dibujo del triángulo HIJ y complete la tabla.

$Razón$	ΔHIJ
$\frac{cat.\,vertical}{hipotenusa}$	
$\frac{cat.\,horizontal}{hipotenusa}$	
$\frac{cat.\,vertical}{cat.\,horizontal}$	

c) Ahora, reduzca a la mitad las medidas del triángulo ABC del ejercicio a), haga un dibujo del nuevo triángulo KLM y complete la tabla.

$Razón$	ΔKLM
$\frac{cat.vertical}{hipotenusa}$	
$\frac{cat.horizontal}{hipotenusa}$	
$\frac{cat.vertical}{cat.horizontal}$	

3. a) Encuentre el cateto del triángulo rectángulo que muestra la figura y complete la

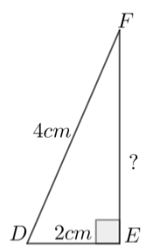


tabla.

$Razón$	ΔDEF
$\frac{cat.vertical}{hipotenusa}$	
$\frac{cat.horizontal}{hipotenusa}$	
$\frac{cat.vertical}{cat.horizontal}$	

b) Duplique las medidas del triángulo DEF para obtener el triángulo PQR, haga un dibujo del triángulo PQR y complete la tabla.

$Razón$	ΔPQR
$\dfrac{cat.\,vertical}{hipotenusa}$	
$\dfrac{cat.\,horizontal}{hipotenusa}$	
$\dfrac{cat.\,vertical}{cat.\,horizontal}$	

c) Ahora, reduzca a la tercera parte las medidas del triángulo DEF del ejercicio a), haga un dibujo del nuevo triángulo STU y complete la tabla.

$Razón$	ΔSTU
$\dfrac{cat.\,vertical}{hipotenusa}$	
$\dfrac{cat.\,horizontal}{hipotenusa}$	
$\dfrac{cat.\,vertical}{cat.\,horizontal}$	

¿Cómo son las razones de los nuevos triángulos comparadas con las de los primeros? ________________________. Compare las tablas con sus compañeros.

Mida los ángulos de cada triángulo y luego compárelos con los triángulos duplicados, ¿cómo son los ángulos? _______________________________________

¿Qué puede concluir acerca de las relaciones de los lados de acuerdo con el ángulo que midió? ____

Actividad 2

Nótese que los triángulos del ejercicio 1 y del ejercicio 2 de la actividad 1 son semejantes. Es decir, $\Delta ABC \sim \Delta HIJ \sim \Delta\, KLM$ y $\Delta DEF \sim \Delta\, PQR \sim \Delta STU$. Tomemos el caso del triángulo $DEF\ y\ PQR$, nótese que, por ser semejantes se cumplen las siguientes proporciones:

$\frac{EF}{DF} = \frac{QR}{PR}, \frac{DE}{DF} = \frac{PQ}{PR}, \ \frac{EF}{DE} = \frac{QR}{PQ}, \frac{DF}{EF} = \frac{PR}{QR}, \frac{DF}{DE} = \frac{PR}{PQ}$, y $\frac{DE}{EF} = \frac{PQ}{QR}$

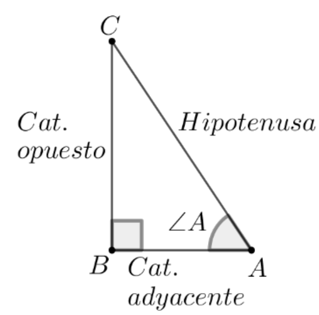
Además, los dos triángulos $(DEF\ y\ PQR)$ tienen sus tres lados correspondientes congruentes, las seis razones escritas anteriormente están ligadas al $\angle FDE$ de manera única. Estas relaciones reciben el nombre de razones trigonométricas y reciben el nombre de $seno, coseno, tangente, cosecante, secante\ y\ cotangente$. Y se escriben de manera abreviada así: $sen, \cos, tan, csc, \sec y\ cot$. En el caso particular tendríamos que:

$$sen\ \angle FDE = \frac{EF}{DF}, \cos\angle FDE = \frac{DE}{DF}, \tan\angle FDE = \frac{EF}{DE},$$

$$\csc\angle FDE = \frac{DF}{EF},\ \sec\angle FDE = \frac{DF}{DE}\ y \cot\angle FDE = \frac{DE}{EF}$$

Nota: En la actividad 1 se les dio a los catetos el nombre de vertical y horizontal, los nombres que se usan en las razones trigonométricas son cateto opuesto y cateto adyacente respectivamente, con respecto a un ángulo.

Es decir, dado un triángulo rectángulo ABC como lo muestra la figura, se definen las siguientes relaciones trigonométricas para el $\angle A$.

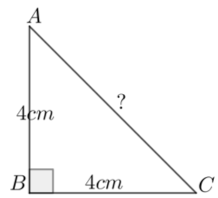


se tiene que $sen\ A = \frac{cat.opuesto}{hipotenusa}, cos\ A = \frac{cat.\ adyacente}{hipotenusa}$, $tan\ A = \frac{cat.opuesto}{cat.adyacente}, csc\ A = \frac{hipotenusa}{cat.opuesto}$,

$$sec\ A = \frac{hipotenusa}{cat.adyacente} \quad y\ \ cot\ A = \frac{cat.adyacente}{cat.opuesto}$$

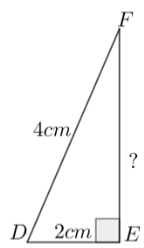
1. De acuerdo a las mediciones hechas en la actividad 1 de los ángulos de los triángulos $ABC\ y\ DEF$. Escriba las medidas de los siguientes ángulos

$m\angle ACB =$_____, $m\angle FDE =$_____ y $m\angle EFD =$_____, luego escriba las razones trigonométricas de los ángulos $\angle ACB, \angle FDE\ y\ \angle DEF$.



$sen\ \angle ACB = —, \cos\angle ACB = —, \tan\angle ACB = —, \csc\angle ACB = —,$

$\sec\angle ACB = —\ y \cot\angle ACB = —$



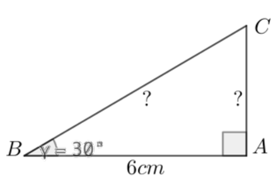
$sen\ \angle FDE = —, \cos\angle FDE = —, \tan\angle FDE = —, \csc\angle FDE = —,$

$\sec\angle FDE = —\ y \cot\angle FDE = —$

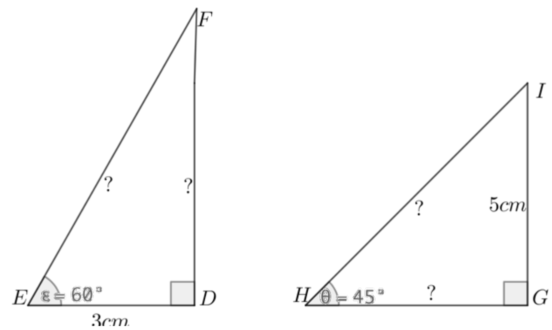
$sen\ \angle EFD = —, \cos\angle EFD = —, \tan\angle EFD = —, \csc\angle EFD = —,$

$\sec\angle EFD = —\ y \cot\angle EFD = —$

2. De acuerdo con las conclusiones del punto 1 de esta actividad encuentre los valores que hacen falta en cada uno de los triángulos.



Cat. opuesto al $\angle\alpha$: _______ Hipotenusa: ________



Cat. Opuesto al $\angle\beta$: ________ Cat. Adyacente al $\angle\gamma$: _________

Hipotenusa: _________ Hipotenusa: ____________

3. Un cable sostiene un poste al suelo. El cable tiene 62 metros de largo y forma un ángulo de 60º con respecto al suelo. Encuentre la distancia de la base del poste hasta el punto donde el cable se une con el suelo.
4. Después de un vendaval una teja de una casa se cayó al suelo, pero quedó recostada sobre la casa formando un ángulo de 45º. La teja está a 4 m de la base de la casa y la teja está a 4 m del suelo (la parte que se recuesta sobre la casa). Encuentre la longitud de la teja.

3.5.13 Taller 13: El Teorema del Coseno y el Teorema del Seno

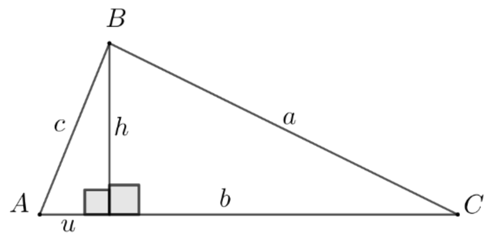
Objetivo: Demostrar el teorema del coseno y del seno.

Actividad 1

El teorema del coseno

El Teorema del Coseno nos permite hallar la medida de un lado conociendo los otros dos y el ángulo que se forma entre ellos.

Complete la siguiente demostración del teorema del coseno. Para esto considere el triángulo ABC que muestra la figura.



(1) $c^2 =$___+_____ despejamos h^2=____________
(2) $a^2 =$_____+ $(b-u)^2$ al remplazar el valor de h^2 y desarrollar el producto notable se obtiene $a^2 =$____________________
(3) $Cos\ A = \frac{\ }{c}$, luego $u =$ __________

Reemplazando (3) en (2) obtenemos:

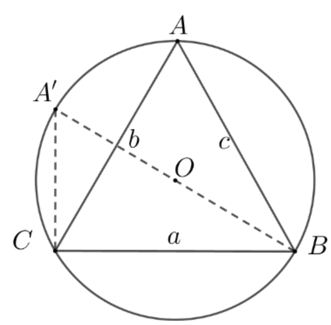
(4) $a^2 =$________________________________

Actividad 2

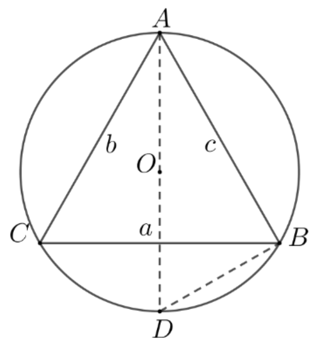
El Teorema del Seno

Recuerde que, dado un triángulo, por sus vértices que son tres puntos no colineales pasa una única circunferencia.

Complete la prueba del Teorema del seno para esto considere un triángulo ABC inscrito en una circunferencia de centro O y radio r como lo muestra la figura.



Afirmación	**Justificación**
(1) $\angle A' \cong \angle A$	____________________
(2) $\Delta A'CB$ es rectángulo	____________________
(3) $sen\ A' = \frac{a}{2R}$	____________________
(4) $2R = \frac{a}{sen\ A'}$	____________________
(5) $2R = \frac{a}{sen\ A}$	____________________



Afirmación **Justificación**

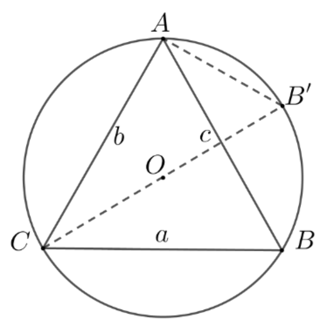
(1) $\angle C \cong \angle D$ ____________________

(2) ΔABD es rectángulo ____________________

(3) $sen\ D = \frac{c}{2R}$ ____________________

(4) $2R = \frac{c}{sen\ D}$ ____________________

(5) $2R = \frac{c}{sen\ C}$ ____________________



Afirmación **Justificación**

(1) $\angle B' \cong \angle B$ ____________________

(2) $\Delta AB'C$ es rectángulo ____________________

(3) $sen\ B' = \frac{b}{2R}$ ____________________

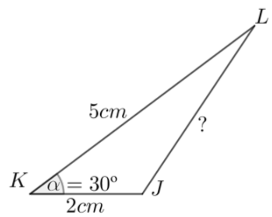
(4) $2R = \frac{b}{sen\ B'}$ ____________________

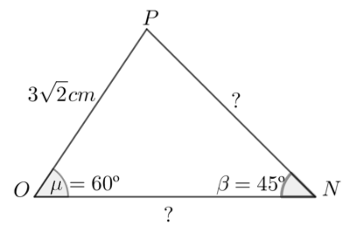
(5) $2R = \frac{b}{sen\ B}$ ____________________

Se puede ver que en cada caso la demostración llega a que una fracción es igual a $2R$. Luego al igualar las tres fracciones obtenemos: ------ = ------ = ------

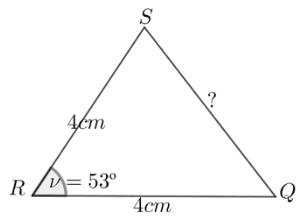
Actividad 3:

1. En cada triángulo hallar la longitud del lado o lados que faltan



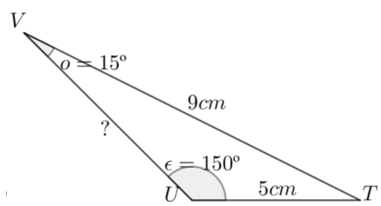


$JL =$ ________ $OP =$ _____ y $ON =$ _____



Para poder hallar el valor de SQ debe saber que el $cos\ 53 \approx 0.6\ y\ sen\ 53 \approx 0.8$.

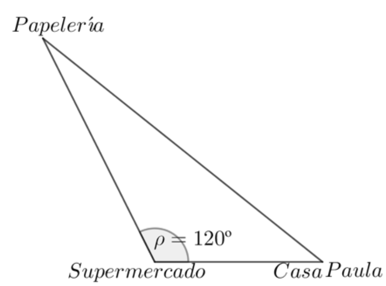
$SQ =$ _______



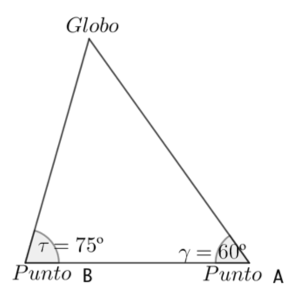
Para este ejercicio debe saber que $sen\ 150° = \frac{1}{2}, \cos 150° = \frac{-\sqrt{3}}{2}, sen\ 15° \approx 0.26\ y \cos 15° \approx 0.97$

$UV =$ _______

2. Paula camina de su casa al supermercado recorriendo una distancia de 42 metros, luego va del supermercado a la papelería recorriendo una distancia de 68 metros, como se muestra en la figura. Si el $\cos 120° = -\frac{1}{2}$, ¿cuántos metros tendrá que caminar Paula de la papelería a su casa si decide irse en línea recta de un punto a otro?



3. Dos personas separadas entre sí 40 metros ven un globo en el cielo, la persona ubicada en el punto A ve el globo con un ángulo de elevación de 60° y la persona en el punto B lo que con un ángulo de elevación de 75°, como lo muestra la figura. Encuentre la distancia que separa a cada observador del globo. ($sen\ 75° \approx 0.97$)



3.5.14 Taller 14: El Teorema de Pitágoras y la teoría de números

Objetivo: Aplicar el teorema de Pitágoras para acercarse al Teorema de Fermat.

Materiales: Plastilina y cartulina

Actividad 1

1. Haga cuadrados de 1 cm con cartulinas, luego forme un cuadrado compuesto por los cuadritos que cortó de tal forma que en cada lado tenga tres cuadritos, al lado forme un cuadrado con cuatro cuadritos de lado. Ahora con todos los cuadritos forme un único cuadrado, ¿cuántos cuadritos tiene de lado este nuevo cuadrado? ___________ Establezca una conclusión ________________________
2. Repita el proceso del punto anterior pero ahora formando dos cuadrados, uno que tenga cinco cuadritos de lado y otro con 12 cuadritos de lado, luego nuevamente forme un cuadrado con los cuadrados de los dos cuadrados anteriores. ¿cuántos cuadritos tiene de lado este nuevo cuadrado? ___________ Establezca una conclusión ________________________

3. Construya dos cuadrados con los cuadritos de tal forma que con los cuadritos de estos dos cuadrados se pueda formar un tercero. Dibuje lo hecho con los cuadritos. Establezca una conclusión ________________________

Actividad 2

1. Ahora vamos a construir tres cubos con la plastilina, uno de 3 cm, otro de 4 cm de lado y otro de 5 cm, luego de esto con la plastilina usada en estos tres cubos forme un nuevo y mida el lado del cubo ¿cuánto mide cada lado de este nuevo cubo? ______________ . Establezca una conclusión __________________________
2. Ahora intente construir dos cubos de las medidas enteras que usted quiera e intente construir un tercer cubo. Comente con sus compañeros lo sucedido y luego escriba una conclusión: ____
3. ¿A que es igual $0^3 + 1^3$? ¿existe un número entero que elevado a la 3 sea igual al resultado que obtuviste? ____________________________

4. ¿A que es igual $2^3 + 5^3$? ¿existe un número entero que elevado a la 3 sea igual al resultado que obtuviste? ______________________________

Un poco de historia…. Como hemos visto, de acuerdo al teorema de Pitágoras existen números enteros positivos $a, b\ y\ c$ tales que $a^2 + b^2 = c^2$. Ahora bien, no existen enteros positivos $a, b\ y\ c$ tales que $a^3 + b^3 = c^3$. Tampoco existen enteros positivos $a, b\ y\ c$ tales que $a^4 + b^4 = c^4$. En general, no existen enteros positivos $a, b\ y\ c$ tales que $a^n + b^n = c^n$ con n un entero positivo mayor que 2.

Este resultado lo conjeturó Pierre Fermat francés en 1637, quien estudio leyes y trabajó entre otras cosas en teoría de números la conjetura resultó cierta y la demostró un matemático Inglés Andrew Wiles en el año 1995. El intento de muchos matemáticos por demostrar esta conjetura permitió el desarrollo de la teoría de números durante más de 300 años.

Actividad 3

1. Escriba 4 números que puedan escribirse de la forma $p = 4n + 1$, con $n \in \mathbb{N}$
   - Si n= 2, entonces $p = 4(2) + 1 = 8 + 1 = 9$
   - $Si\ \ n =$ ______$, entonces\ \ p =$ ______
   - $Si\ \ n =$ ______$, entonces\ \ p =$ ______
   - $Si\ \ n =$ ______$, entonces\ \ p =$ ______
   - $Si\ \ n =$ ______$, entonces\ \ p =$ ______
2. Escriba otros 4 números de tal manera que p resulte un numero primo
   - $n = 1\ \ p = 4(1) + 1 = 5\ \ p = 5$
   - $Si\ n =$ ____ $entonces\ \ p =$ ____
   - $Si\ n =$ ____ $entonces\ \ p =$ ____
   - $Si\ n =$ ____ $entonces\ \ p =$ ____
   - $Si\ n =$ ____ $entonces\ \ p =$ ____
3. Use los números del punto 2 y verifique si se pueden escribir como la suma de dos cuadrados perfectos, si es así escriba la suma de la que provienen.
   - $5 = 2^2 + 1^2$
   - ______________
   - ______________
   - ______________

- ____________

4. Escriba tres números primos que no cumplan la ecuación del punto 1, es decir que no sean de la forma 4n + 1 ______, ______ y _______. ¿Es posible escribir estos números como la suma de dos cuadrados perfectos? _____________________________________.
5. Por último, escriba una conclusión a partir de los resultados obtenidos en la actividad 3: ____

____

3.6 Observaciones sobre la aplicación de los talleres

A continuación, se hace breve descripción de los resultados obtenidos de la aplicación de algunos de los talleres, los cuales se aplicaron en el Liceo Navarra con estudiantes de grado octavo con edades entre 13 y 15 años. Para tal efecto, se considera el tema estudiado y los talleres en los cuales se relaciona. Es de anotar, que, aunque lo ideal era aplicar los talleres en el grado en el cual se aborda el Teorema de Pitágoras por primera vez, pero por razones logísticas y administrativos hubo dificultades al respecto y se aplicaron a los estudiantes del siguiente grado. Finalmente consideramos que este ejercicio nos brinda información acerca de los problemas alrededor de los contenidos necesarios para abordar el teorema, así como de las temáticas que se derivan de este.

En este punto consideramos importante anotar que se observó que los estudiantes afianzaron las temáticas en cuestión, creemos que se apropiaron de una mejor manera de los conceptos involucrados en las temáticas desarrolladas. Ahora bien, a continuación, se presentan algunas observaciones al trabajo realizado por los estudiantes en los diferentes talleres. Cabe anotar que dichas observaciones son de carácter general y que algunas ilustraciones al respecto se pueden encontrar en los anexos desde el A hasta el N donde se presentan algunos de los talleres desarrollados por los estudiantes.

En el taller 1 “El Teorema de Pitágoras y áreas de cuadrados” los estudiantes como ya conocían el Teorema de Pitágoras se tardaron muy poco tiempo en el desarrollo del mismo, también se notó que la mayoría de ellos había memorizado el teorema porque las respuestas que daban no relacionaban las áreas de las figuras, sino que repetían el

Teorema de Pitágoras. En este taller usaron por primera vez el programa Geogebra, esto les gustó mucho a los estudiantes porque nunca habían usado un programa en la clase de matemáticas.

En el taller 2 “El Teorema de Pitágoras y los rompecabezas” los estudiantes se tomaron más tiempo para la solución, pero al final lograron construir sus rompecabezas de manera correcta y ya interpretaron mejor la relación de las áreas de las figuras sobre los catetos y sobre la hipotenusa. En este taller no todos aceptaron el reto de crear un nuevo rompecabezas.

En el taller 3 “El Teorema de Pitágoras y la congruencia de polígonos” los estudiantes interpretaron la definición de congruencia de figuras y la aplicaron al identificar figuras congruentes, dibujar figuras congruentes a figuras dadas. La mayoría de ellos lograron encontrar la relación de las áreas de figuras congruentes y para los que aún no lo habían visto la relación de las áreas, la actividad del rompecabezas ayudó a entender por completo el concepto.

Como parte del desarrollo histórico del Teorema de Pitágoras se desarrolló el taller 4 “Ternas pitagóricas”, en el que además de estudiar las diferentes ternas que construyeron los chinos, Platón y los pitagóricos. Lo anterior acompañado de reseñas históricas del estudio que cada uno de los mencionados logró en el estudio de ternas. En este mismo taller se estudió el recíproco del Teorema de Pitágoras. Los estudiantes desarrollaron muy bien todo el taller sin presentar ninguna dificultad y se sorprendieron al conocer todas las ternas que se habían creado antes de que se formalizará el Teorema o antes de que se logrará una demostración formal del mismo.

En el taller 5 “Aplicaciones” fue gratificante ver que a pesar de que los triángulos no se presentaban de la forma tradicional los estudiantes lograron aplicar de manera correcta el Teorema de Pitágoras. El problema que más les generó dificultad fue uno de los que se había mencionado en la parte histórica de este trabajo, un problema planteado por los chinos.

En el taller 6 “Los números reales y la recta numérica” algunos creyeron que estaban construyendo ternas pitagóricas creyendo que era una continuación del taller 4, pero otros se dieron cuenta que el Teorema sirvió para ubicar algunos números irracionales. En el desarrollo del taller los estudiantes conversaron acerca de estos dos conceptos que tenían y al final recordaron que no eran ternas pitagóricas porque no siempre eran enteros y concluyeron que esta era una manera de construir números y de ubicarlos sobre la recta numérica. En este taller todos los estudiantes desarrollaron el punto en donde se planteaba un reto.

Como parte del estudio de áreas los estudiantes desarrollaron los siguientes talleres: el taller 7 “Triángulos equiláteros sobre triángulos rectángulos” en este los estudiantes lograron encontrar una fórmula para el hallar el área de los triángulos equiláteros. En este taller los estudiantes si relacionaron las áreas de las figuras sobre los catetos con el área de la figura sobre la hipotenusa. El taller “Círculos sobre triángulos rectángulos” ocurrió algo similar a lo del taller 7. El último taller de áreas es el taller 9 “Polígonos regulares sobre triángulos rectángulos” en este la dificultad que tuvieron fue reconocer que un hexágono está compuesto por triángulos equiláteros, pero al hablar con sus compañeros se dieron cuenta de esto y pudieron desarrollar todo. En este taller el uso de Geogebra les ayudo bastante para poder ver que no importa que polígono regular se dibuje sobre los catetos y la hipotenusa de un triángulo rectángulo, siempre se cumplirá la relación entre ellas.

En el taller 10 “Pasando a la formalidad” los estudiantes tuvieron dificultad con la demostración hecha por Pappus, la que fue más fácil para ellos fue la demostración hecha por Garfield. La demostración de la aplicación del teorema de la potencia fue la que mas les sorprendió por la aplicación de la geometría del circulo en una demostración del Teorema. A medida que lo iban desarrollando los estudiantes se dieron cuenta que los temas tratados en los demás talleres los estaban usando para poder dar las justificaciones pedidas en cada paso de las demostraciones. Fue un trabajo difícil para ellos, fue le taller que más tiempo les tomo en desarrollar, pero el que más les sirvió para debatir entre ellos. Esto sirvió para formalizar muchos conceptos y usar un vocabulario más formal y matemáticamente correcto, por ejemplo, ya no hablaban de “figuras iguales” sino de “figuras congruentes” de una manera natural.

En el taller 11 “Semejanza”, en este se evidencio que los estudiantes tienen dificultades para entender este concepto si no se muestra el dibujo de la manera estándar. En este mismo taller se pudo ver que el hecho de poner ejercicios que no cumplieran la condición de semejanza ayudo para afianzar el concepto de figuras semejantes.

En el taller 12 “De los triángulos rectángulos a las razones trigonométricas” en este taller los estudiantes sin ningún problema concluyeron que los triángulos congruentes tenían las mismas razones trigonométricas, pero a la hora de aplicar estos resultados en el desarrollo de problemas para algunos no fue tan fácil.

En el taller 13 “El Teorema del Coseno y el Teorema del Seno” los estudiantes desarrollaron unas demostraciones de estos teoremas, todos pudieron seguir las demostraciones que se pedían y algunos incluso (en el teorema del seno) no sólo justificaban, sino que además sabían que paso debía seguir en la demostración. La dificultad en el desarrollo de este taller fue la aplicación de estos teoremas en el desarrollo de problemas prácticos.

Por último, se trabajó el taller 14 “El teorema de Pitágoras y la teoría de números” que es con el que se cumple parcialmente el último objetivo de este trabajo, un taller que da un acercamiento a algunos resultados de la teoría de números y muestra un poco lo que es el último teorema de Fermat. En el taller se intentó hacer una pequeña inducción para que ellos pudieran decir con sus palabras el último teorema de Fermat, este ejercicio se cumplió por parte de todos los estudiantes. Y luego en los resultados de la teoría de números, las características que cumplían ciertos números primos las relacionaron con las ternas pitagóricas, algunos en este punto recordaron lo hecho en el taller 6.

4 Conclusiones y recomendaciones

4.1 Conclusiones

- La historia como recurso didáctico en la enseñanza de cualquier concepto matemático es importante, ya que enriquece el concepto y le da sentido al estudiante, porque le muestra cómo funciona la ciencia, ya que al conocer la historia va conociendo cómo, o que motivó a la humanidad a desarrollar los conceptos que se están aprendiendo.
- Es importante la aplicación de problemas, no sólo plantear ejercicios numéricos, los problemas le pueden brindar un contexto actual o histórico que le presentan una situación en la que debe aplicar el concepto aprendido. Enriqueciendo así su aprendizaje ya que se puede ver que es aplicable el concepto y no simplemente es teoría.
- Un obstáculo que se presenta en el aprendizaje del Teorema de Pitágoras por parte de los estudiantes, es el mismo que tuvieron los pitagóricos, los estudiantes se acostumbran a que el teorema sólo arroja resultados enteros. Y genera un poco de conflicto en ellos cuando se empiezan a poner resultados que no son enteros.
- El uso de software geométricos acerca el concepto a los estudiantes a su era. Es decir, en un mundo tecnológico si se siguen enseñando los conceptos de la misma forma que se enseñaban hace cincuenta años y sin usar las herramientas que tenemos hoy en día, el estudiante no le emocionará aprender un concepto. Mientras que si se le muestra que la tecnología le facilita la construcción de figuras y que le permite observar resultados de manera sencilla, se sentirá más a gusto en el aprendizaje.
- Como conclusión final, durante la aplicación de esta propuesta los estudiantes practicaron muchas ramas de las matemáticas como: el álgebra (reemplazar en

fórmulas, resolver ecuaciones de primer y segundo grado, operaciones con polinomios), unidades de medida, geometría y aritmética.

4.2 Recomendaciones

Los talleres diseñados en este trabajo pueden ser reforzados con más ejercicios y profundizando un poco más la parte de la teoría de números, esto con el fin que los estudiantes conozcan más acerca de esta rama de las matemáticas.

Después de tener charlas con los profesores de matemáticas del colegio donde se aplicó la propuesta se sugiere que estos talleres se pueden distribuir y aplicar en varios grados, por ejemplo, los de áreas se pueden poner para un curso como sexto y los último para grados como noveno y décimo.

Se sugiere que además de todos los temas que se abordaron en este trabajo para mostrar las matemáticas que se necesitan antes de entender el teorema de Pitágoras y las matemáticas que se pueden desarrollar después de aprender este Teorema, también el docente puede buscar aplicaciones interdisciplinares, las cuales pueden darle más sentido a los estudiantes del Teorema.

Se pueden diseñar más talleres en los que se use la parte histórica de este trabajo. A pesar, de que se usan algunas de las ternas y un problema planteado por los chinos no se usó toda la historia como el caso de las tablillas de los babilonios.

El trabajo no necesariamente debe terminar con la teoría de números, es decir, el docente puede buscar otros temas en el área que necesiten del resultado del Teorema.

A. Anexo: Solución del taller 1 presentada por los estudiantes

Valeria Vallejo Buitrago

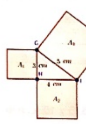
Taller 1: El Teorema de Pitágoras y áreas de cuadrados

Objetivo: Realizar un primer acercamiento al Teorema de Pitágoras por medio del cálculo de áreas de cuadrados.

Materiales: Geogebra, lápiz y papel.

Actividad 1

1. En el triángulo GHI se han construido cuadrados sobre sus lados como se muestra en la figura. Calcule las áreas de cada uno de los cuadrados.



$A_1 =$ 9 cm² $A_2 =$ 16 cm²

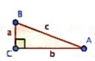
$A_3 =$ 25 cm².

Halle:

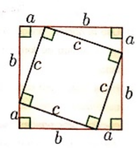
$A_1 + A_2 =$ 25 cm²

¿Qué puede concluir? la suma de los catetos del ΔGHI que corresponden a los lados de A_1 y A_2 es igual a la hipotenusa del ΔGHI que es igual a un lado de A_3.

2. La figura muestra un triángulo rectángulo de catetos a y b y hipotenusa c.



Se desea encontrar una relación entre la hipotenusa y los catetos del triángulo dado. Para tal fin se construye un cuadrado de lado $(a + b)$ como lo muestra la figura de la derecha.



a) Calcule el área del cuadrado de lado $(a + b)$.

$A =$ $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

b) De acuerdo con la construcción que muestra la figura, se han determinado 4 triángulos rectángulos de catetos a y b y un cuadrado de lado c.

i) Halle el área de cada triángulo que hay dentro de la figura.

$A_\Delta =$ $\left(\frac{a \cdot b}{2}\right) \cdot 4 = 2ab$

ii) Halle el área del cuadrado de lado c.

$A =$ c^2

iii) Sume las áreas de los 4 triángulos y el área del cuadrado pequeño de lado c. $2ab + c^2$

c) Nótese que los resultado hallados en **a)** y **iii)** deben ser iguales ¿porqué? Ahora iguale las expresiones obtenidas en **a)** y **b)**, simplifique las expresiones, ¿A que es igual c^2? $a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2 \rightarrow c^2 = a^2 + b^2$

d) De acuerdo con los resultados obtenidos en este ejercicio y en el ejercicio anterior, exprese con sus palabras una conclusión derivada del análisis de estos ejercicios. la suma de los catetos al cuadrado es igual la hipotenusa al cuadrado

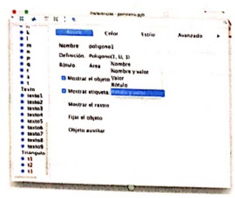
Actividad 2

1. **a)** Usando el programa Geogebra dibuje un triángulo de lados 6, 8 y 10 con la opción "polígono".

b) Use la opción "ángulo" y halle la medida de cada ángulo. ¿De acuerdo a las medidas de sus ángulos, ¿qué clase de tríangulo se ha construido? ∡A: 53,13° ∡C: 36,8° ∡B: 90° Δ Re ctangulo

c) Use la opción "polígono regular" para dibujar sobre cada lado del triángulo un cuadrado de longitud igual al lado.

d) Haga click sobre cada uno de los cuadrados construidos y en la opción "propiedades" seleccione "básico". En la parte de "Rótulo" escriba "área" y en la parte de "mostrar etiqueta" seleccione "rótulo y valor" como se ve en la imagen.



e) Escriba el área de cada uno de los cuadrados: A_1: 100 A_2: 36 A_3: 64.

f) Halle una relación entre las áreas de los cuadrados sobre los catetos y el área del cuadrado sobre la hipotenusa? la suma de las áreas de los cuadrados A_2 y A_3 es igual al A_1.

g) Complete $10^2 = 6^2 +$ 8^2.

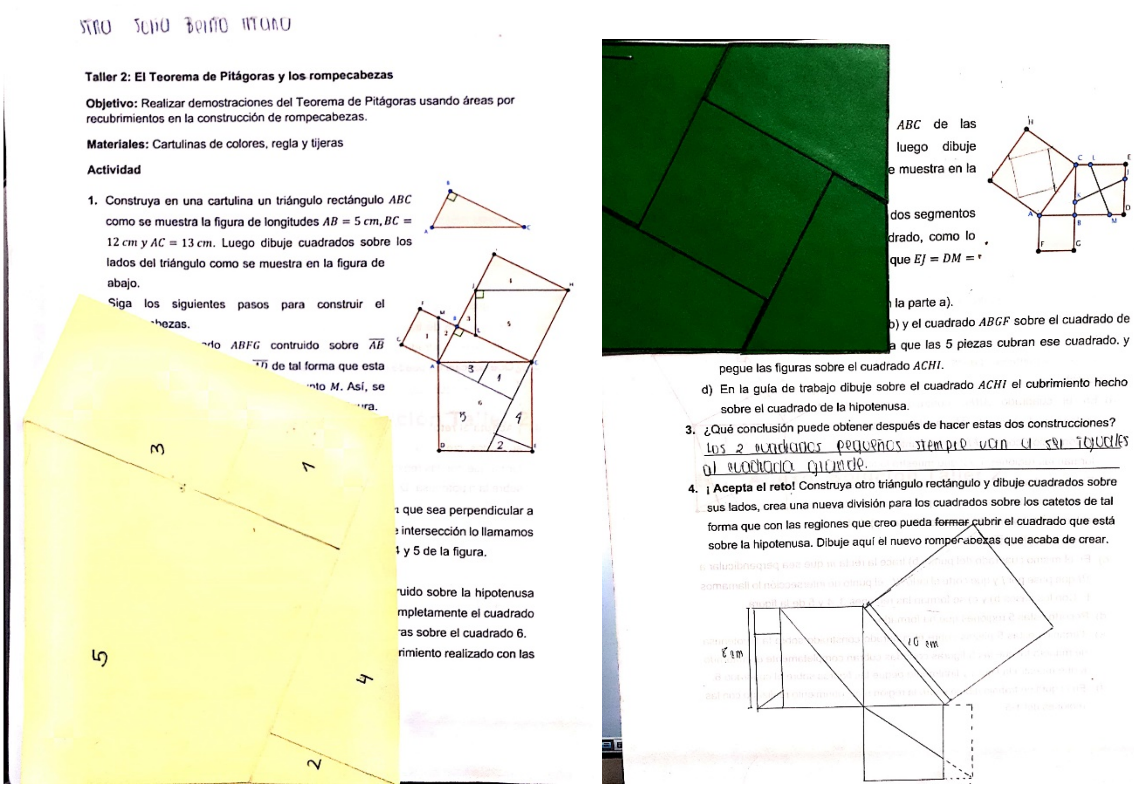
2. Usando el programa Geogebra dibuje un triángulo de lados 5, 12 y 13 con la opción "polígono" y repita los pasos a)-g) del ejercicio 1 de esta actividad.
Repita el paso a)
b) ∡A = 22,6° ∡B = 90 ∡C = 67,3°
Repita el paso c) y d)
e) A_1 = 169 A_2 = 144 A_3 = 25
f) la suma de las areas de A_2 y A_3 es igual a el A_1
g) $13^2 = 5^2 +$ 12^2.

3. Usando el programa Geogebra dibuje un triángulo de lados 7, 10 y 12 con la opción "polígono". Repita los pasos de a) – e) del ejercicio 1 de esta actividad.
Repita el paso a)
b) [illegible]
Repita el paso c) y d)
g)

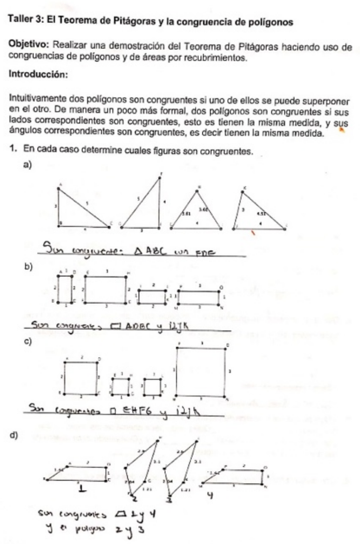
4. ¿Existe alguna relación entre las áreas de los cuadrados determinados?
No existe ninguna relación

5. Escriba con sus palabras una conclusión relacionada con este ejercicio?
El Tma. de pitágoras solo aplica para triángulos rectángulos

B. Anexo: Solución del taller 2 presentada por los estudiantes



C. Anexo: Solución del taller 3 presentada por los estudiantes



Taller 3: El Teorema de Pitágoras y la congruencia de polígonos

Objetivo: Realizar una demostración del Teorema de Pitágoras haciendo uso de congruencias de polígonos y de áreas por recubrimientos.

Introducción:

Intuitivamente dos polígonos son congruentes si uno de ellos se puede superponer en el otro. De manera un poco más formal, dos polígonos son congruentes si sus lados correspondientes son congruentes, esto es tienen la misma medida, y sus ángulos correspondientes son congruentes, es decir tienen la misma medida.

1. En cada caso determine cuales figuras son congruentes.

a)

Son congruente: Δ ABC con FDE

b)

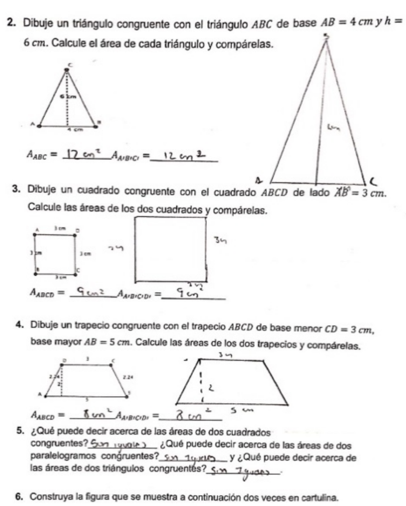
Son congruentes □ ADBC y I2JK

c)

Son congruentes □ EHFG y I2JK

d)

son congruentes ▱ 1 y 4 y el polígono 2 y 3



2. Dibuje un triángulo congruente con el triángulo ABC de base $AB = 4\,cm$ y $h = 6\,cm$. Calcule el área de cada triángulo y compárelas.

$A_{ABC} =$ 12 cm² $A_{A'B'C'} =$ 12 cm²

3. Dibuje un cuadrado congruente con el cuadrado $ABCD$ de lado $\overline{AB} = 3\,cm$. Calcule las áreas de los dos cuadrados y compárelas.

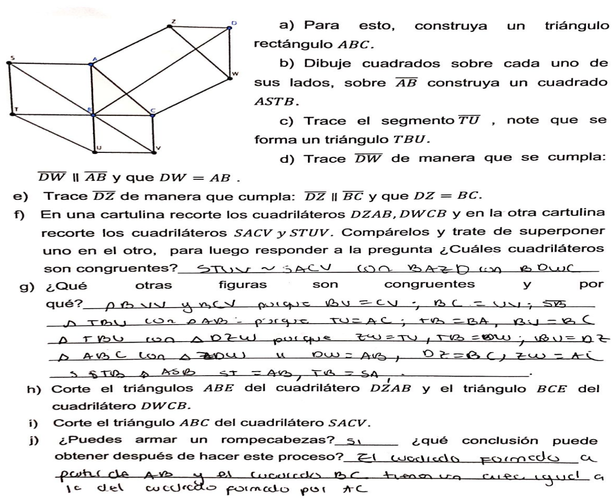
$A_{ABCD} =$ 9 cm² $A_{A'B'C'D'} =$ 9 cm²

4. Dibuje un trapecio congruente con el trapecio $ABCD$ de base menor $CD = 3\,cm$, base mayor $AB = 5\,cm$. Calcule las áreas de los dos trapecios y compárelas.

$A_{ABCD} =$ 8 cm² $A_{A'B'C'D'} =$ 8 cm²

5. ¿Qué puede decir acerca de las áreas de dos cuadrados congruentes? Son iguales ¿Qué puede decir acerca de las áreas de dos paralelogramos congruentes? son iguales y ¿Qué puede decir acerca de las áreas de dos triángulos congruentes? son iguales.

6. Construya la figura que se muestra a continuación dos veces en cartulina.



a) Para esto, construya un triángulo rectángulo ABC.

b) Dibuje cuadrados sobre cada uno de sus lados, sobre $\overline{AB}$ construya un cuadrado $ASTB$.

c) Trace el segmento $\overline{TU}$, note que se forma un triángulo TBU.

d) Trace $\overline{DW}$ de manera que se cumpla: $\overline{DW} \parallel \overline{AB}$ y que $DW = AB$.

e) Trace $\overline{DZ}$ de manera que cumpla: $\overline{DZ} \parallel \overline{BC}$ y que $DZ = BC$.

f) En una cartulina recorte los cuadriláteros $DZAB, DWCB$ y en la otra cartulina recorte los cuadriláteros $SACV$ y $STUV$. Compárelos y trate de superponer uno en el otro, para luego responder a la pregunta ¿Cuáles cuadriláteros son congruentes? STUV ~ SACV con BAZD con BDWC

g) ¿Qué otras figuras son congruentes y por qué? ABUV y BCV porque BU = CV ; BC = UV ; STB
Δ TBU con Δ AB porque TU = AC ; TB = BA , BU = BC
Δ TBU con Δ DZW porque ZW = TU , TB = DW ; BU = DZ
Δ ABC con Δ ZDW " DW = AB , DZ = BC , ZW = AC
Δ STB Δ ASB ST = AB , TB = SA .

h) Corte el triángulos ABE del cuadrilátero $DZAB$ y el triángulo BCE del cuadrilátero $DWCB$.

i) Corte el triángulo ABC del cuadrilátero $SACV$.

j) ¿Puedes armar un rompecabezas? si ¿qué conclusión puede obtener después de hacer este proceso? El cuadrado formado a partir de AB y el cuadrado BC tienen un área igual a la del cuadrado formado por AC

D. Anexo: Solución del taller 4 presentada por los estudiantes

Juan Jose Morales

Taller 4: Ternas pitagóricas

Objetivo: Estudiar diferentes formas de determinar ternas pitagóricas.

Materiales: Lápiz y papel

Una terna pitagórica consiste de tres enteros positivos que corresponden a los lados de un triángulo rectángulo. Por ejemplo $5, 12\ y\ 13$ es una terna pitagórica, lo cual se verifica a continuación: $5^2 = 25$, $12^2 = 144$, $13^2 = 169$, y $25 + 144 = 169$, luego $5^2 + 12^2 = 13^2$; por lo tanto $5, 12\ y\ 13$ son los lados de un triángulo rectángulo. Ahora, $6, 7\ y\ 8$ no es una terna pitagórica, puesto que $6^2 + 7^2 = 8^2$.

Actividad 1

1. Sea n un entero positivo. Considere las ternas de la forma $3n, 4n\ y\ 5n$. Dando valores a n se obtienen ternas de enteros positivos. Así por ejemplo, si $n = 2$, se obtiene la terna $3, 4\ y\ 5$ (6, 8, 10); nótese que $3^2 + 4^2 = 5^2$ ($6^2 + 8^2 = 10^2$), asi que $3, 4\ y\ 5$ es una terna pitagórica. De acuerdo con esta idea complete:
   a. Si $n = 3$, se obtiene la terna 9, 12 y 15.
   b. Si $n = 4$, se obtiene la terna 12, 16 y 20.
   c. De otros valores a n y obtenga otras 3 ternas. En cada caso determine si las ternas halladas son ternas pitagóricas.
   6, 8 y 10
   15, 20 y 25
   18, 24 y 30
   d. Complete la demostración de que las ternas de la forma $3n, 4n\ y\ 5n$ son en general ternas pitagóricas.
   $(3n)^2 = 9n^2$
   $(4n)^2 = 16n^2$
   $(5n)^2 = 25n^2$
   ¿Qué puedes concluir? $9n^2 + 16n^2 = 25n^2$ (V).
2. Los chinos encontraron un modelo para encontrar otra ternas pitagóricas diferentes a las anteriores. Ese modelo es: $a = mn$, $b = \frac{1}{2}(m^2 - n^2)$ y $c = \frac{1}{2}(m^2 + n^2)$, siendo $m\ y\ n$ enteros positivos, ambos pares o ambos impares, con mayor $m > n$. En este caso, $a\ y\ b$ representan las longitudes de los catetos del triángulo y c la hipotenusa. De acuerdo con esto encuentre 3 ternas y en cada caso verifique que estas son ternas pitagóricas.
   a) 8, 6 y 10 $n=4, n=2$
   3, 4 y 5 $n=1, m=5$
   12, 16 y 20 $n=6, m=2$

   b) Demuestre que la terna mencionada en el este ejercicio es en general una terna pitagórica.
   $mn^2 + \frac{1}{2}\ m^2 \cdot 2mn + n^2 = \frac{1}{2}\ m^2 + 2mn + n^2$

Nota: Nótese que la parte b) esta diciendo que sin importar los valores de $m\ y\ n$, con $m > n$, la terna encontrada corresponde a los lados de un triángulo rectángulo, solo que para nuestro caso no necesariamente con valores arbitrarios de m y n se producen ternas pitagóricas.

   c) Hallar ternas para los valores de $m\ y\ n$ indicados y en cada caso verifique que los valores de a, b y c encontrados corresponden a los lados de un triángulo rectángulo.
   (i) $m = 2\ y\ n = 1$ 2, 3/2 y 5/2
   (ii) $m = 4\ y\ n = 3$ 12, 7/2 y 25/2

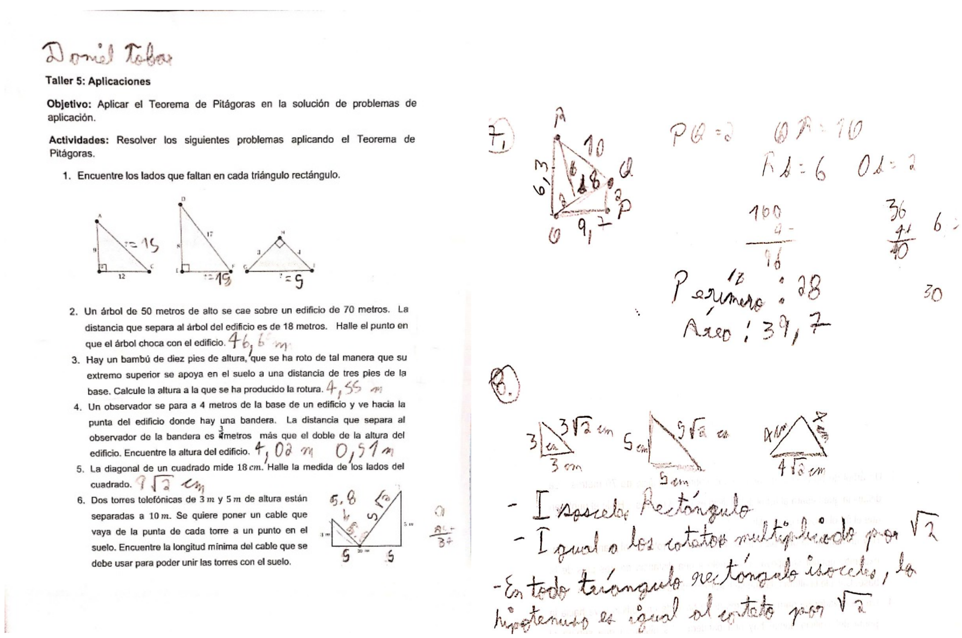
3. El matemático y filósofo griego Platón (427-347 a.C.), fundador de la Academia, también encontró fórmulas para encontrar ternas pitagóricas, estas fueron: $a = 2m, b = m^2 - 1\ y\ c = m^2 + 1$, siendo m un entero positivo mayor que 1. Encuentre 3 ternas con estas nuevas fórmulas y en cada caso verifique que son ternas pitagóricas.
   a) 4, 3 y 5 $n=2$
   6, 8 y 10 $n=3$
   10, 24 y 26 $n=5$
   b) Demuestre que la terna mencionada en el este ejercicio es en general una terna pitagórica.
   $4m^2 + m^4 - 2m^2 + 1 = m^4 + 2m^2 + 1$
   $m^4 + 2m^2 + 1 = m^4 + 2m^2 + 1$ (V)
4. La escuela de los pitagóricos, fundada por Pitágoras en el S. VI a.C., planteó también sus fórmulas, muy similares a las de Platón, esta fueron:

$a = m, b = \frac{m^2-1}{2}\ y\ c = \frac{m^2+1}{2}$ con m un número impar. ¿Por qué m debe ser impar? para que al sumarle o restarle 1 se convierta en par y se pueda dividir entre 2

a) Encuentre 3 ternas pitagóricas con las fórmulas de los pitagóricos.
3, 4 y 5 $m=3$
5, 12 y 13 $n=5$
7, 24 y 25 $m=7$
b) Demuestre que la terna mencionada en el este ejercicio es en general una terna pitagórica.
$m^2 + \frac{1}{4}\ m^4 - 2m^2 + 1 = \frac{1}{4}\ m^4 + 2m^2 + 1$
$\frac{1}{4}\ m^4 + 2m^2 + 1 = \frac{1}{4}\ m^4 + 2m^2 + 1$

5. ¿Algunas de las ternas que ha encontrado se puede encontrar con las cuatro fórmulas vistas? si ¿Cuál? 3, 4, 5 ¿Existirán más ternas que coincidan en todos las fórmulas? si, en caso afirmativo de un ejemplo 9, 12, 15
6. ¿Cúales de las siguientes ternas corresponden a los lados de un triángulo rectángulo?
   64 36 +16
   a) 6, 8 y 10
   b) 7, 4 y 6
   c) 15, 10 y 12
   d) 5, 12 y 13
   e) 8, 9 y 16

E. Anexo: Solución del taller 5 presentada por los estudiantes



Daniel Tobar

Taller 5: Aplicaciones

Objetivo: Aplicar el Teorema de Pitágoras en la solución de problemas de aplicación.

Actividades: Resolver los siguientes problemas aplicando el Teorema de Pitágoras.

1. Encuentre los lados que faltan en cada triángulo rectángulo.

   ? = 15 ? = 15 ? = 5

2. Un árbol de 50 metros de alto se cae sobre un edificio de 70 metros. La distancia que separa al árbol del edificio es de 18 metros. Halle el punto en que el árbol choca con el edificio. 46,6 m
3. Hay un bambú de diez pies de altura, que se ha roto de tal manera que su extremo superior se apoya en el suelo a una distancia de tres pies de la base. Calcule la altura a la que se ha producido la rotura. 4,55 m
4. Un observador se para a 4 metros de la base de un edificio y ve hacia la punta del edificio donde hay una bandera. La distancia que separa al observador de la bandera es 3 metros más que el doble de la altura del edificio. Encuentre la altura del edificio. 4,02 m 0,51 m
5. La diagonal de un cuadrado mide $18\,cm$. Halle la medida de los lados del cuadrado. $9\sqrt{2}$ cm
6. Dos torres telefónicas de $3\,m$ y $5\,m$ de altura están separadas a $10\,m$. Se quiere poner un cable que vaya de la punta de cada torre a un punto en el suelo. Encuentre la longitud mínima del cable que se debe usar para poder unir las torres con el suelo.

7.

PQ = 2 QR = 10

RS = 6 OS = 2

Perímetro : 28

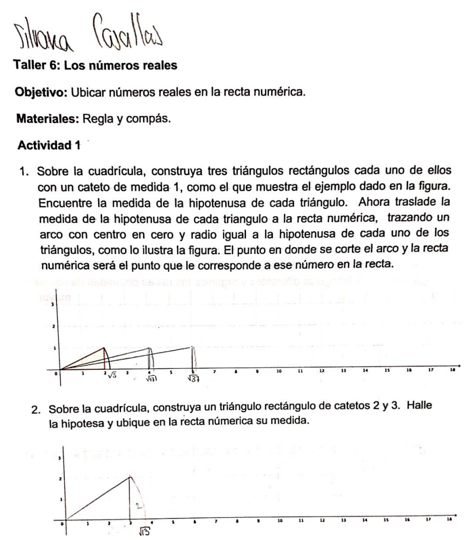
Área : 39,7

8.

- Isosceles Rectángulo
- Igual a los catetos multiplicado por $\sqrt{2}$

- En todo triángulo rectángulo isosceles, la hipotenusa es igual al cateto por $\sqrt{2}$

F. Anexo: Solución del taller 6 presentada por los estudiantes



Taller 6: Los números reales

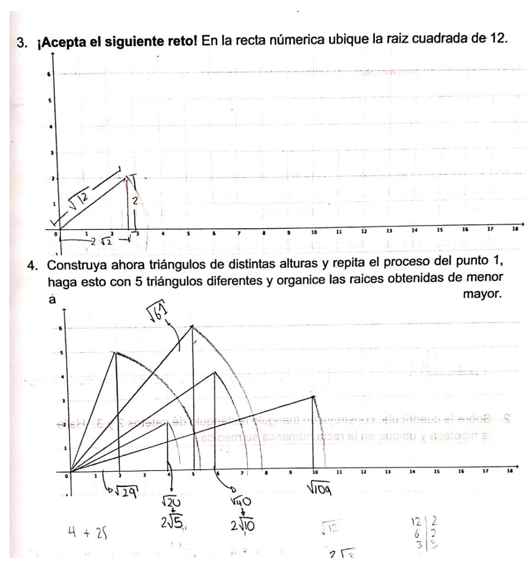
Objetivo: Ubicar números reales en la recta numérica.

Materiales: Regla y compás.

Actividad 1

1. Sobre la cuadrícula, construya tres triángulos rectángulos cada uno de ellos con un cateto de medida 1, como el que muestra el ejemplo dado en la figura. Encuentre la medida de la hipotenusa de cada triángulo. Ahora traslade la medida de la hipotenusa de cada triangulo a la recta numérica, trazando un arco con centro en cero y radio igual a la hipotenusa de cada uno de los triángulos, como lo ilustra la figura. El punto en donde se corte el arco y la recta numérica será el punto que le corresponde a ese número en la recta.

2. Sobre la cuadrícula, construya un triángulo rectángulo de catetos 2 y 3. Halle la hipotesa y ubique en la recta númerica su medida.



3. **¡Acepta el siguiente reto!** En la recta númerica ubique la raiz cuadrada de 12.

4. Construya ahora triángulos de distintas alturas y repita el proceso del punto 1, haga esto con 5 triángulos diferentes y organice las raices obtenidas de menor a mayor.

G. Anexo: Solución del taller 7 presentada por los estudiantes

Taller 7: Triángulos equiláteros sobre triángulos rectángulos

Tema: Áreas de triángulos equiláteros e isósceles

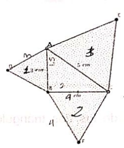
Objetivo: Relacionar las áreas de los triángulos equiláteros construidos sobre lo lados de un triángulo rectángulo.

Materiales: Geogebra, lápiz y papel

Actividad 1

1. Dibuje un triángulo equilátero de lado 4 cm, luego encuentre los valores que se piden a continuación.
   - Su altura $2\sqrt{3}$ cm
   - Su área. $4\sqrt{3}$ cm

2. En la figura se han dibujado triángulos equiláteros sobre los lados del triángulo rectángulo ABC, donde $AB = 3\ cm, BC = 4\ cm\ y\ AC = 5cm$
   a) Verifique que efectivamente el triángulo ABC es rectángulo.
   b) Halle la altura de cada triángulo equilátero.
   c) Halle el área de cada triángulo equilátero.



$A_1 = \frac{9\sqrt{3}}{4}$ $h: \frac{\sqrt{27}}{2}$ $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

$A_2 = 4\sqrt{3}$ / $\frac{16\sqrt{3}}{4}$ $h: \sqrt{12} \to 2\sqrt{3}$

$A_3 = \frac{25\sqrt{3}}{4}$ $h: \frac{5\sqrt{3}}{2}$

$A_1 + A_2 = \frac{25\sqrt{3}}{4}$

3. Construya un triángulo rectángulo de catetos $5\ cm, 12\ cm\ y\ 13\ cm$, luego construya triángulos equiláteros sobre sus lados y halle las áreas de cada triángulo equilátero construido.

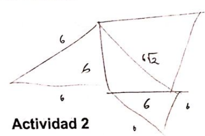
$A_1 = 25\sqrt{3}/4$

$A_2 = 36\sqrt{3}$

$A_3 = 169\sqrt{3}/4$

$A_1 + A_2 = 169\sqrt{3}/4$

4. Construya un triángulo rectángulo de catetos $6\ cm\ y\ 6\ cm$. Construya triángulos equiláteros sobre sus lados y halle las áreas de cada triángulo equilátero construido.



$A_1 = 9\sqrt{3}$

$A_2 = 9\sqrt{3}$

$A_3 = 18\sqrt{3}$

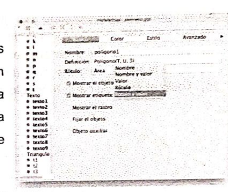
$A_1 + A_2 = 18\sqrt{3}$

Actividad 2

1. a) Usando el programa Geogebra dibuje un triángulo rectángulo rectángulos diferentes con la opción "polígono".

   b) Use la opción "polígono regular" para construir sobre los lados del triángulo triángulos equiláteros.

   c) Haga click sobre cada una de las figuras y seleccione la opción "propiedades" y seleccione "básico". En la parte de "Rótulo" escriba "área" y en la parte de "mostrar etiqueta" seleccione "rótulo y valor" como se ve en la imagen.

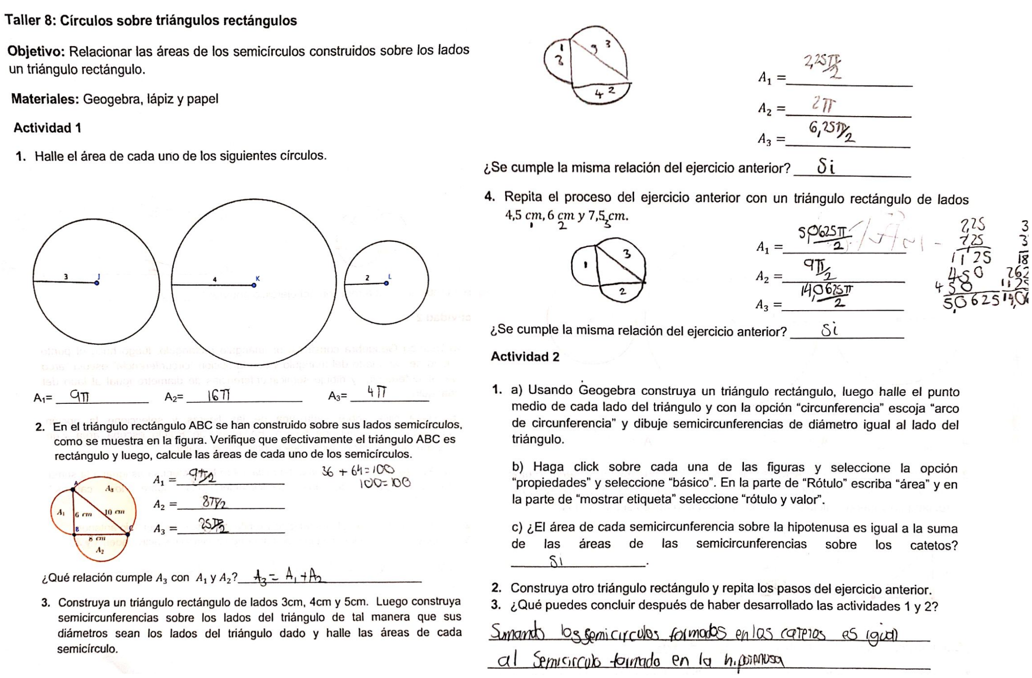


   d) Verifique si el área del triángulo equilátero sobre la hipotenusa es igual a la suma de los dos triángulos equiláteros sobre los catetos.

2. Construya otro triángulo rectángulo y repita los pasos del ejercicio anterior
3. ¿Qué puedes concluir después de haber desarrollado las actividades 1 y 2?

Que en un triángulo rectángulo, si se le constru-yen 3 triángulos equiláteros, la suma de los triángulos de los catetos es el área triángulo de la hipotenusa

H. Anexo: Solución del taller 8 presentada por los estudiantes



Taller 8: Círculos sobre triángulos rectángulos

Objetivo: Relacionar las áreas de los semicírculos construidos sobre los lados un triángulo rectángulo.

Materiales: Geogebra, lápiz y papel

Actividad 1

1. Halle el área de cada uno de los siguientes círculos.

A_1= 9π A_2= 16π A_3= 4π

2. En el triángulo rectángulo ABC se han construido sobre sus lados semicírculos, como se muestra en la figura. Verifique que efectivamente el triángulo ABC es rectángulo y luego, calcule las áreas de cada uno de los semicírculos.

A_1 = 9π/2
A_2 = 8π/2
A_3 = 25π/2

36 + 64 = 100
100 = 100

¿Qué relación cumple A_3 con A_1 y A_2? $A_3 = A_1 + A_2$

3. Construya un triángulo rectángulo de lados 3cm, 4cm y 5cm. Luego construya semicircunferencias sobre los lados del triángulo de tal manera que sus diámetros sean los lados del triángulo dado y halle las áreas de cada semicírculo.

A_1 = 2,25π/2
A_2 = 2π
A_3 = 6,25π/2

¿Se cumple la misma relación del ejercicio anterior? Si

4. Repita el proceso del ejercicio anterior con un triángulo rectángulo de lados 4,5 cm, 6 cm y 7,5 cm.

A_1 = 5,0625π/2
A_2 = 9π/2
A_3 = 14,0625π/2

¿Se cumple la misma relación del ejercicio anterior? Si

Actividad 2

1. a) Usando Geogebra construya un triángulo rectángulo, luego halle el punto medio de cada lado del triángulo y con la opción "circunferencia" escoja "arco de circunferencia" y dibuje semicircunferencias de diámetro igual al lado del triángulo.

b) Haga click sobre cada una de las figuras y seleccione la opción "propiedades" y seleccione "básico". En la parte de "Rótulo" escriba "área" y en la parte de "mostrar etiqueta" seleccione "rótulo y valor".

c) ¿El área de cada semicircunferencia sobre la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de las semicircunferencias sobre los catetos? Si.

2. Construya otro triángulo rectángulo y repita los pasos del ejercicio anterior.
3. ¿Qué puedes concluir después de haber desarrollado las actividades 1 y 2?

Sumando los semicirculos formados en las catetos es igual al semicirculo formado en la hipotenusa

I. Anexo: Solución del taller 9 presentada por los estudiantes

Camilo Sánchez

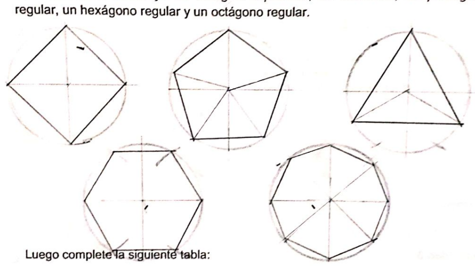
Taller 9: Polígonos regulares sobre triángulos rectángulos

Objetivo: Relacionar las áreas de los polígonos regulares construidos sobre los lados de un triángulo rectángulo.

Actividad 1

Teóricamente todo polígono regular se puede inscribir en una circunferencia. Para construir un polígono regular de lados n, se dibujan en una circunferencia ángulos centrales de medida $360°/n$ y se unen los puntos de corte de los ángulos con la circunferencia.

Con esta idea, construya un triángulo equilátero, un cuadrado, un pentágono regular, un hexágono regular y un octágono regular.

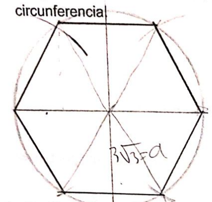


Luego complete la siguiente tabla:

Polígono regular	Número de lados	Medida de cada ángulo interior
Triángulo equilátero	3	60°
Cuadrado	4	90°
Pentágono regular	5	72°
Hexágono regular	6	60°
Octágono regular	8	45°

Actividad 2

1. Dibuje una circunferencia de 6 cm de radio y un hexágono regular inscrito en la circunferencia



$3\sqrt{3} = a$

¿Cuál es la medida del lado?: 6

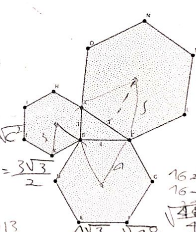
Halle el valor de la apotema: $3\sqrt{3}$

$\frac{18\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3} \cdot 6$

$A = 54\sqrt{3}$

Halle el área del hexágono: $54\sqrt{3}$

2. Se dibujan hexágonos sobre los lados del triángulo ABC Si $AB = 3cm, BC = 4cm$ y $AC = 5cm$. Calcule las áreas de cada uno de los hexágonos y complete lo que se pide.



$A_1 = \frac{9\sqrt{3}}{4} \cdot 6 = \frac{27\sqrt{3}}{2}$

$A_2 = \frac{16\sqrt{3}}{4} \cdot 6 = \frac{48\sqrt{3}}{2} = 24\sqrt{3}$

$A_3 = \frac{75\sqrt{3}}{2}$

Verifique: $A_1 + A_2 = A_3$

$\frac{27\sqrt{3}}{2} + \frac{48\sqrt{3}}{2} = \frac{75\sqrt{3}}{2}$

$25 - \frac{25}{4} = c$

$\sqrt{\frac{75}{4}} = c^2$

$\frac{\sqrt{75}}{4} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$

$\frac{\sqrt{27}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

$16 - \frac{16}{4} = c$

$\sqrt{48} = c^2$

$\frac{4\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{48}}{2}$

Actividad 3

1. a) Usando el programa Geogebra dibuje un triángulo rectángulo con la opción "polígono".
   b) Use la opción "polígono regular" para construir sobre los lados del triángulo pentágonos.
   c) Haga click sobre cada una de las figuras y seleccione la opción "propiedades" y seleccione "básico". En la parte de "Rótulo" escriba "área" y en la parte de "mostrar etiqueta" seleccione "rótulo y valor".
   d) ¿Cuál es la relación que cumplen las áreas de los pentágonos sobre los catetos y el área del pentágono sobre la hipotenusa?

Las áreas de los pentágonos en los catetos sumados son el área del de la hipotenusa

2. Construya otro triángulo rectángulo y repita el ejercicio 1 con ¿se cumple la misma relación del ejercicio anterior? Sí

3. Construya otro triángulo rectángulo y repita el ejercicio 1 con otro polígono regular diferente a los trabajados y responda: ¿qué polígono dibujo? Hexágono

¿Sigue cumpliéndose la relación del ejercicio 1 y 2? Sí

4. ¿Qué puede concluir luego de hacer la actividad 1 y 2?
No importa el polígono usado, la suma de las áreas de las figuras de los catetos será igual al área del polígono de la hipotenusa

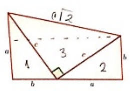
J. Anexo: Solución del taller 10 presentada por los estudiantes

Taller 10: Pasando a la formalidad

Objetivo: Demostrar el Teorema de Pitágoras de una manera más formal usando la estructura de la demostración de la forma razón-justificación.

Actividad 1

1. Con dos triángulos rectángulos de catetos a y b, de hipotenusa c, como el que se muestra en la figura, se ha construido un trapecio que se termina de formar con un triángulo rectángulo de catetos c.



a) Calcule el área del trapecio de base mayor a y base menor b. $A = \frac{a^2+2ab+b^2}{2}$

b) Calcule el área de los triángulos que conforman al trapecio $A_1 = \frac{ab}{2}$, $A_2 = \frac{ab}{2}$ y $A_3 = \frac{c^2}{2}$

c) Reemplace: $A = A_1 + A_2 + A_3$ $\frac{ab}{2} + \frac{ab}{2} + \frac{c^2}{2}$

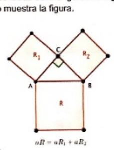
$ab + \frac{c^2}{2} = \frac{a^2+2ab+b^2}{2}$

$c^2 + 2ab = a^2 + 2ab + b^2$

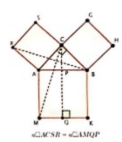
$c^2 = a^2 + b^2$

d) Por último, despeje $c^2 = a^2 + b^2$

2. Sobre los lados del triángulo rectángulo ABC se han construido cuadrados como lo muestra la figura.



$aR = aR_1 + aR_2$



$a\square ACSR = a\square AMQP$

Complete

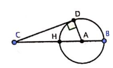
- ¿Por qué $\angle RAB \cong \angle CAM$? porque tienen el mismo vértice
- ¿Por qué es $\Delta RAB \cong \Delta CAM$? porque sus ∢ son iguales
- ¿Por qué el $a\Delta RAB = a\,\Delta CAM$? porque los Δ son congruentes
- ¿AC es una altura de ΔRAB? no
- ¿Por qué es $a\square ACSR = 2a\Delta CAM$? porque al dividir el triángulo en 2 queda la mitad del cuadrado
- ¿Es $a\square AMPQ = 2a\Delta CAM$? porque el rectángulo es congruente con el [illegible]
- ¿Por qué $a\square ACSR = a\square AMPQ$? porque son congruentes
- ¿Es $a\square BHGC = a\square PQKB$? porque BHGC ≅ ACSR y PQKB ≅ AMPQ
- ¿Es $a\square AMKB = a\square AMQP + a\square PQKB$? ¿Por qué? hacen parte de la misma figura.

Conclusión:

Demostración del teorema de pitágoras en Δ ABC

Actividad 2

En la figura, el triángulo ADC es rectángulo con ángulo recto en D y $\overline{CD}$ es tangente a la circunferencia de centro A y radio AB.



Complete:

Afirmación	Justificación
1. $\overline{CD}$ *es tangente*	porque cruza por un solo punto la circunferencia.
2. $\overline{AD} \perp \overline{CD}$	rectos (90°) de ∢ D
3. $CH \cdot CB = CD^2$	Por el teorema de la potencia
4. $CH = AC - AH = AC - AD$	porque $\overline{AD}$ y $\overline{AH}$ son radios
5. $CB = AC + AB = AC + AD$	porque $\overline{AB}$ y $\overline{AD}$ son radios
6. $(AC - AD)(AC + AD) = CD^2$	Reemplazando en la ecuación original
7. $AC^2 - AD^2 = CD^2$	teorema de pitágoras
8. $AC^2 = CD^2 + AD^2$	Al despejar AC.

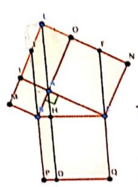
Conclusión:

cumple el teorema de pitágoras mediante demostración

Actividad 3

Sobre los lados del triángulo rectángulo ABC se han construido cuadrados como lo muestra la figura.

Complete lo que sea necesario. Se construyen cuadrados sobre los lados del triángulo ABC.



Afirmación	Justificación
1 Se traza $\overline{AH}$ y se prolonga hasta L y D	construcción auxiliar
2 $\Delta ABC \cong \Delta OLA \cong \Delta IAL$	por que es el mismo b de $\overline{AB}$ y h de $\overline{AC}$.
3 $LA = BC = HD$	de (2)
4 $a\,ABEL = a\,BHPD = a\,ABMI$	porque son congruentes
5 $a\,BHPD = a\,ABMI$	de (4)
6 $a\,ACNO = a\,HCQD$	porque son congruentes
7 $a\,BPQC = a\,ABMI + a\,ACNO$	teorema de pitágoras

Conclusión

Demostración de teorema de pitágoras

K. Anexo: Solución del taller 11 presentada por los estudiantes

Juan Sebastián Ojeda

Taller 11 Semejanza

Objetivo: Identificar figuras semejantes y sus características.

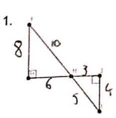
Materiales: Cartulinas y regla.

Actividad 1

1. Construya un triángulo equilátero ABC de lado $6\,cm$. Mida sus ángulos y registre sus medidas $\angle A =$ 60°, $m\angle B =$ 60° y $m\angle C =$ 60°. Ahora construya otro triángulo equilátero $A'B'C'$ de lados $18\,cm$. Nuevamente mida sus ángulos y registre sus medidas $m\angle A' =$ 60°, $m\angle B' =$ 60° y $m\angle C' =$ 60°.
2. Responda:
   - ¿Qué relación tienen los ángulos de los dos triángulos? Son los mismos.
   - Escriba los siguientes cocientes: $\frac{AB}{A'B'} = \frac{1}{3}$, $\frac{BC}{B'C'} = \frac{1}{3}$ y $\frac{AC}{A'C'} = \frac{1}{3}$.
   - ¿Qué relación tienen los cocientes anteriores? Tienen la misma medida.
   - ¿Los triángulos son semejantes? Si.
3. Construya un triángulo rectángulo ABC, con $AB = 6\,cm, BC = 6\,cm$ y $AC = 6\sqrt{2}$. Mida sus ángulos y registre sus medidas $\angle A =$ 45, $m\angle B =$ 90° y $m\angle C =$ 45°. Ahora construya otro triángulo rectángulo $A'B'C'$ con $AB = 4\,cm, BC = 4\,cm$ y $AC = 4\sqrt{2}$. Nuevamente mida sus ángulos y registre sus medidas $m\angle A' =$ 45°, $m\angle B' =$ 90° y $m\angle C' =$ 45°.
4. Responda:
   - ¿Qué relación tienen los ángulos de los dos triángulos? Son los mismos.
   - Escriba los siguientes cocientes: $\frac{AB}{A'B'} = \frac{3}{2}$, $\frac{BC}{B'C'} = \frac{3}{2}$ y $\frac{AC}{A'C'} = \frac{3}{2}$.
   - ¿Qué relación tienen los cocientes anteriores? Tienen la misma medida.
   - ¿Los triángulos son semejantes? Si.

Actividad 2

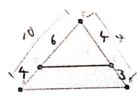
En cada caso verificar si los de cada figura, son semejantes y en caso afirmativo calcular las medidas de los segmentos que se piden.

1. 

$FG = 8\,cm$, $GH = 6\,cm$ y $HJ = 3\,cm$.
Son semejantes: Si ¿por qué? AA

$x^2 = 64 + 36$

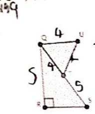
$FH =$ 10, $IJ =$ 4 y $HI =$ 5

2. 

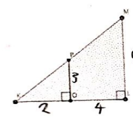
$CD = 6\,cm$, $CA = 10\,cm$, $CE = 4\,cm$ y $CB = 7\,cm$.
Son semejantes: No ¿por qué? DE no es paralela con $\overline{AB}$

$AB^2 = 100 + 49 = 149$

$CE =$ 4 $AB =$ $\sqrt{149}$

3. 

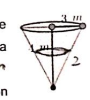
1. $QU = QT = UT = 4\,cm$, $QS = 9\,cm$ y $QR = 5\,cm$
Son semejantes: No ¿por qué? No se cumplen los criterios

4. 

$KO = 2\,cm, OL = 4\,cm$ y $OP = 3\,cm$.
Son semejantes: Si ¿por qué? Criterio AA
$KP =$ $\sqrt{13}$, $KM =$ $\sqrt{117}$ y $ML =$ 9

Actividad 3

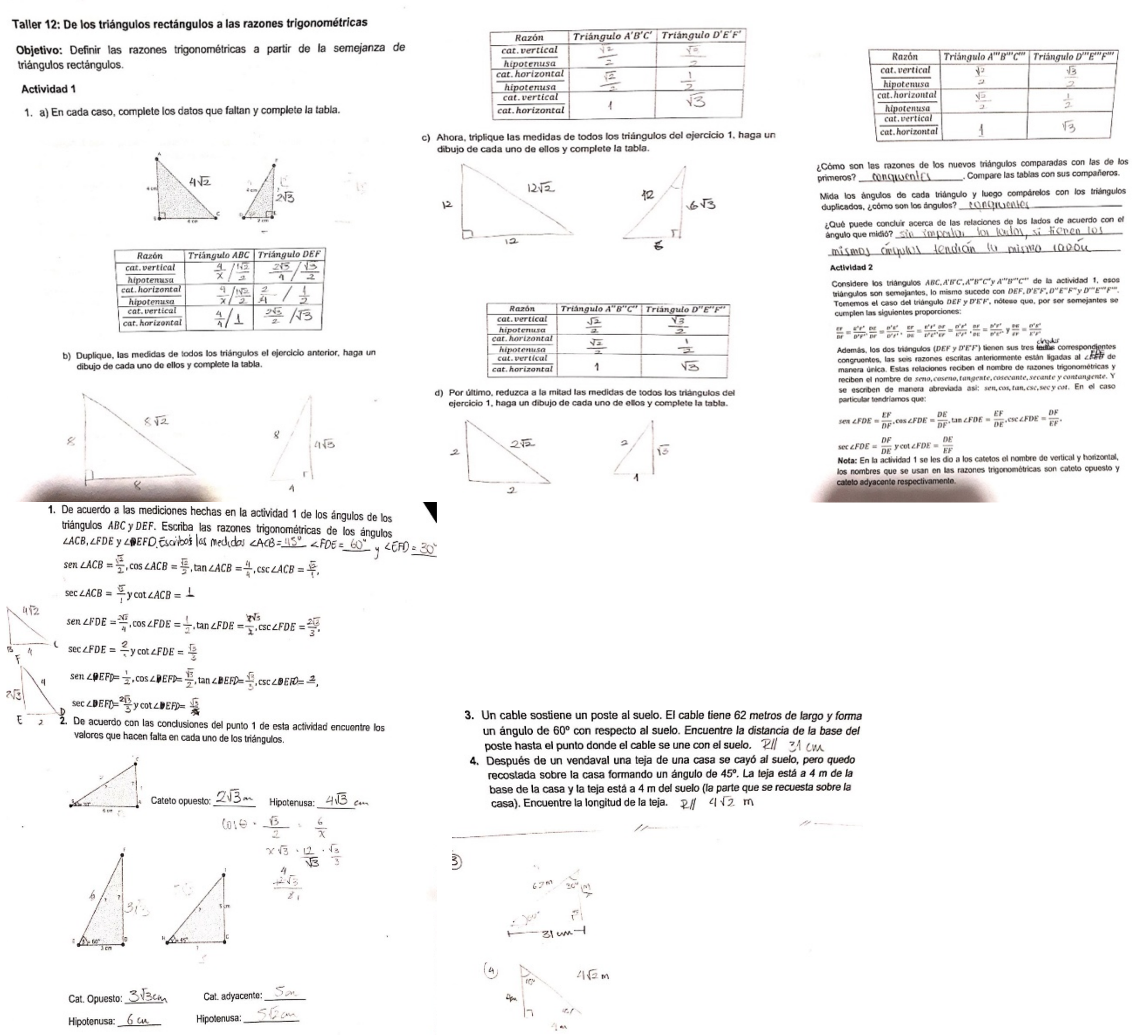
1. Una persona camina alejándose de un edificio de 15m de altura hasta que nota que su sombra y la del edificio terminan en el mismo punto. Si su sombra mide 2 m en ese momento del día, la persona está ubicada a 16 m del edificio. ¿Cuál es la altura de la persona? 1,89m
2. Un tanque de forma cónica de radio 3 m y altura 4 m, tiene agua que alcanza los dos metros de altura, como lo muestra la figura. ¿Cuál es el radio del cono formado por el agua? 1,5m



3. Los lados de un triángulo rectángulo ABC guardan una relación de 3: 2 con los lados de otro triángulo $A'B'C'$. Si $AB = 5, BC = 12$ y $AC = 13$. Halle las medidas de los lados del triángulo $A'B'C'$.

$A'B' = 10/3$ $B'C' = 8$ $A'C' = 26/3$

L. Anexo: Solución del taller 12 presentada por los estudiantes



Taller 12: De los triángulos rectángulos a las razones trigonométricas

Objetivo: Definir las razones trigonométricas a partir de la semejanza de triángulos rectángulos.

Actividad 1

1. a) En cada caso, complete los datos que faltan y complete la tabla.

Razón	Triángulo ABC	Triángulo DEF
cat. vertical / hipotenusa	$\frac{4}{x}$ / $\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{4}$ / $\frac{\sqrt{3}}{2}$
cat. horizontal / hipotenusa	$\frac{4}{x}$ / $\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{2}{4}$ / $\frac{1}{2}$
cat. vertical / cat. horizontal	$\frac{4}{4}$ / 1	$\frac{2\sqrt{3}}{2}$ / $\sqrt{3}$

b) Duplique, las medidas de todos los triángulos el ejercicio anterior, haga un dibujo de cada uno de ellos y complete la tabla.

Razón	Triángulo A'B'C'	Triángulo D'E'F'
cat. vertical / hipotenusa	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cat. horizontal / hipotenusa	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
cat. vertical / cat. horizontal	1	$\sqrt{3}$

c) Ahora, triplique las medidas de todos los triángulos del ejercicio 1, haga un dibujo de cada uno de ellos y complete la tabla.

Razón	Triángulo A''B''C''	Triángulo D''E''F''
cat. vertical / hipotenusa	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cat. horizontal / hipotenusa	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
cat. vertical / cat. horizontal	1	$\sqrt{3}$

d) Por último, reduzca a la mitad las medidas de todos los triángulos del ejercicio 1, haga un dibujo de cada uno de ellos y complete la tabla.

Razón	Triángulo A'''B'''C'''	Triángulo D'''E'''F'''
cat. vertical / hipotenusa	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cat. horizontal / hipotenusa	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
cat. vertical / cat. horizontal	1	$\sqrt{3}$

¿Cómo son las razones de los nuevos triángulos comparadas con las de los primeros? conguentes. Compare las tablas con sus compañeros.

Mida los ángulos de cada triángulo y luego compárelos con los triángulos duplicados, ¿cómo son los ángulos? congruentes

¿Qué puede concluir acerca de las relaciones de los lados de acuerdo con el ángulo que midió? sin importar los lados, si tienen los mismos ángulos tendrán la misma razón

Actividad 2

Considere los triángulos $ABC, A'B'C', A''B''C''$ y $A'''B'''C'''$ de la actividad 1, esos triángulos son semejantes, lo mismo sucede con $DEF, D'E'F', D''E''F''$ y $D'''E'''F'''$. Tomemos el caso del triángulo DEF y $D'E'F'$, nótese que, por ser semejantes se cumplen las siguientes proporciones:

$\frac{EF}{DF}=\frac{E'F'}{D'F'}, \frac{DE}{DF}=\frac{D'E'}{D'F'}, \frac{EF}{DE}=\frac{E'F'}{D'E'}, \frac{DF}{EF}=\frac{D'F'}{E'F'}, \frac{DF}{DE}=\frac{D'F'}{D'E'}$ y $\frac{DE}{EF}=\frac{D'E'}{E'F'}$

Además, los dos triángulos (DEF y $D'E'F'$) tienen sus tres ~~lados~~ ángulos correspondientes congruentes, las seis razones escritas anteriormente están ligadas al $\angle FDE$ de manera única. Estas relaciones reciben el nombre de razones trigonométricas y reciben el nombre de *seno, coseno, tangente, cosecante, secante y contangente*. Y se escriben de manera abreviada así: *sen, cos, tan, csc, sec y cot*. En el caso particular tendríamos que:

$sen\angle FDE=\frac{EF}{DF}, \cos\angle FDE=\frac{DE}{DF}, \tan\angle FDE=\frac{EF}{DE}, \csc\angle FDE=\frac{DF}{EF}$,

$\sec\angle FDE=\frac{DF}{DE}$ y $\cot\angle FDE=\frac{DE}{EF}$

Nota: En la actividad 1 se les dio a los catetos el nombre de vertical y horizontal, los nombres que se usan en las razones trigonométricas son cateto opuesto y cateto adyacente respectivamente.

1. De acuerdo a las mediciones hechas en la actividad 1 de los ángulos de los triángulos ABC y DEF. Escriba las razones trigonométricas de los ángulos $\angle ACB, \angle FDE$ y $\angle EFD$. Escriba las medidas $\angle ACB =$ 45° $\angle FDE =$ 60° y $\angle EFD =$ 30°

$sen\angle ACB=\frac{\sqrt{2}}{2}, \cos\angle ACB=\frac{\sqrt{2}}{2}, \tan\angle ACB=\frac{4}{4}, \csc\angle ACB=\frac{\sqrt{2}}{1}$,

$\sec\angle ACB=\frac{\sqrt{2}}{1}$ y $\cot\angle ACB=1$

$sen\angle FDE=\frac{2\sqrt{3}}{4}, \cos\angle FDE=\frac{1}{2}, \tan\angle FDE=\frac{2\sqrt{3}}{2}, \csc\angle FDE=\frac{2\sqrt{3}}{3}$,

$\sec\angle FDE=\frac{2}{1}$ y $\cot\angle FDE=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$sen\angle EFD=\frac{1}{2}, \cos\angle EFD=\frac{\sqrt{3}}{2}, \tan\angle EFD=\frac{\sqrt{3}}{3}, \csc\angle EFD=2$,

$\sec\angle EFD=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ y $\cot\angle EFD=\sqrt{3}$

2. De acuerdo con las conclusiones del punto 1 de esta actividad encuentre los valores que hacen falta en cada uno de los triángulos.

Cateto opuesto: $2\sqrt{3}$ m Hipotenusa: $4\sqrt{3}$ cm

Cat. Opuesto: $3\sqrt{3}$ cm Cat. adyacente: 5 cm

Hipotenusa: 6 cm Hipotenusa: $5\sqrt{2}$ cm

3. Un cable sostiene un poste al suelo. El cable tiene 62 *metros de largo y forma* un ángulo de 60° con respecto al suelo. *Encuentre la distancia de la base del* poste hasta el punto donde el cable se une con el suelo. R// 31 cm

4. Después de un vendaval una teja de una casa se cayó *al suelo, pero quedo* recostada sobre la casa formando un ángulo de 45°. *La teja está a 4 m de la* base de la casa y la teja está a 4 m del suelo (*la parte que se recuesta sobre la* casa). Encuentre la longitud de la teja. R// $4\sqrt{2}$ m

M. Anexo: Solución del taller 13 presentada por los estudiantes

VALERIA VILLEGAS

Taller 13: El Teorema del Coseno y el Teorema del Seno

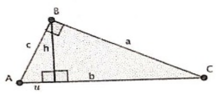
Objetivo: Demostrar el teorema del coseno y del seno.

Actividad 1

El teorema del coseno

El Teorema del Coseno nos permite hallar la medida de un lado conociendo los otros dos y el ángulo que se forma entre ellos.

Complete la siguiente demostración del teorema del coseno. Para esto considere el triángulo ABC que muestra la figura.



(1) $c^2 = u^2 + h^2$ despejamos $h^2 = c^2 - u^2$

(2) $a^2 = h^2 + (b-u)^2$ al remplazar el valor de h^2 y desarrollar el producto notable se obtiene $a^2 = h^2 + b^2 - 2bu + u^2$ $\to c^2 - u^2 + b^2 - 2bu + u^2$

(3) $Cos\ A = \frac{u}{c}$, luego $u = c \cdot \cos A$

Reemplazando (3) en (2) obtenemos:

(4) $a^2 = c^2 - 2bc \cdot \cos A + b^2$

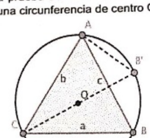
$b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$

Actividad 2

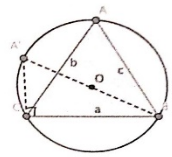
El Teorema del Seno

Recuerde que, dado un triángulo, por sus vértices que son tres puntos no colineales pasa una única circunferencia.

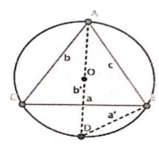
Complete la prueba del Teorema del seno para esto considere un triángulo ABC inscrito en una circunferencia de centro O y radio r como lo muestra la figura.



Afirmación	**Justificación**
(1) $\angle B' \cong \angle B$	∢ inscrito
(2) ΔAB'C es rectángulo	∢ inscrito
(3) $sen\ B' = \frac{b}{2R}$	funciones trigonométricas
(4) $2R = \frac{b}{sen\ B'}$	se despejó "2R"
(5) $2R = \frac{b}{sen\ B}$	D① congruentes ($\angle B' \cong \angle B$).



Afirmación	**Justificación**
(1) $\angle A' \cong \angle A$	∢ inscrito
(2) ΔA'CB es rectángulo	∢ inscrito
(3) $sen\ A' = \frac{a}{2R}$	funciones trigonométricas
(4) $2R = \frac{a}{sen\ A'}$	se despejó "2R"
(5) $2R = \frac{a}{sen\ A}$	De ① ($\angle A' \cong \angle A$). congruentes



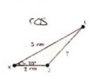
Afirmación	**Justificación**
(1) $\angle C \cong \angle D$	∢ inscrito
(2) ΔABD es rectángulo	∢ inscrito
(3) $sen\ D = \frac{c}{2R}$	funciones trigonométricas
(4) $2R = \frac{c}{sen\ D}$	Se despejó "2R"
(5) $2R = \frac{c}{sen\ C}$	De 1) congruentes ($\angle C \cong \angle D$)

Se puede ver que en cada caso la demostración llega a que una fracción es igual a $2R$. Luego al igualar las tres fracciones obtenemos: $\frac{a}{senA} = \frac{c}{senC} = \frac{b}{senB}$

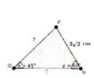
Actividad 3:

1. En cada triángulo hallar la longitud del lado o lados que faltan

cos



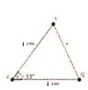
$JL = \sqrt{29 - 10\sqrt{3}}$



$\frac{a}{senA} = \frac{b}{SenB}$

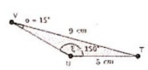
$\frac{a}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$

$OP = \frac{3}{2}$ y $ON = 3\sqrt{3}$



Para poder hallar el valor de SQ debe saber que el $cos\ 53 \approx 0.6\ y\ sen \approx 0.8$.

$SQ = \sqrt{12.8}$

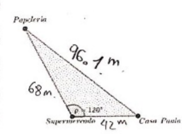


Para este ejercicio debe saber que $sen\ 150° = \frac{1}{2}, \cos 150° = \frac{-\sqrt{3}}{2}, sen\ 15° \approx 0.26\ y \cos 15° \approx 0.97$

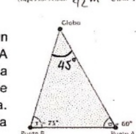
$\frac{9}{0.26} = 31{,}6 \quad \frac{a}{0.26} = 8{,}216$

$UV = 8{,}216$

2. Paula camina de su casa al supermercado recorriendo una distancia de 42 metros, luego va del supermercado a la papelería recorriendo una distancia de 68 metros, como se muestra en la figura. Si el $\cos 120° = -\frac{1}{2}$, ¿cuántos metros tendrá que caminar Paula de la papelería a su casa si decide irse en línea recta de un punto a otro?



3. Dos personas separadas entre sí 40 metros ven un globo en el cielo, la persona ubicada en el punto A ve el globo con un ángulo de elevación de 60° y la persona en el punto B lo que con un ángulo de elevación de 75°, como lo muestra la figura. Encuentre la distancia que separa a cada observador del globo. ($sen\ 75° \approx 0.97$)



② $a^2 = 4624 + 4764 \cdot 5712 \left(-\frac{1}{2}\right)$

$a = \sqrt{9244} \quad a = 96.1$

③ $\frac{40}{0.97} = \frac{b}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$\frac{40\sqrt{2}}{0.97} = c$

$\frac{40}{0.97} = \frac{2b}{\sqrt{3}}$

$\frac{40\sqrt{3}}{1.94} = b$

N. Anexo: Solución del taller 14 presentada por los estudiantes

Daniel Tobar

Taller 14: El Teorema de Pitágoras y la teoría de números

Tema: Teorema de Fermat

Objetivo: Aplicar el teorema de Pitágoras para acercarse al Teorema de Fermat.

Materiales: Plastilina y cartulina

Actividad 1

1. Haga cuadrados de 1 cm con cartulinas, luego forme un cuadrado compuesto por los cuadritos que cortó de tal forma que en cada lado tenga tres cuadritos, al lado forme un cuadrado con cuatro cuadritos de lado. Ahora con todos los cuadritos forme un único cuadrado, ¿cuántos cuadritos tiene de lado este nuevo cuadrado? 5 3 Establezca una conclusión $3^2 + 4^2 = 5^2$
2. Repita el proceso del punto anterior pero ahora formando dos cuadrados, uno que tenga cinco cuadritos de lado y otro con 12 cuadritos de lado, luego nuevamente forme un cuadrado con los cuadrados de los dos cuadrados anteriores. ¿cuántos cuadritos tiene de lado este nuevo cuadrado? 13 Establezca una conclusión $12^2 + 5^2 = 13^2$
3. Construya dos cuadrados con los cuadritos de tal forma que con los cuadritos de estos dos cuadrados se pueda formar un tercero. Dibuje lo hecho con los cuadritos. Establezca una conclusión $6^2 + 8^2 = 10^2$

Actividad 2

1. Ahora vamos a construir tres cubos con la plastilina, uno de 3 cm, otro de 4 cm de lado y otro de 5 cm, luego de esto con la plastilina usada en estos tres cubos forme un nuevo y mida el lado del cubo ¿cuánto mide cada lado de este nuevo cubo? 6 . Establezca una conclusión $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$
2. Ahora intente construir dos cubos de las medidas enteras que usted quiera e intente construir un tercer cubo. Comente con sus compañeros lo sucedido y luego escriba una conclusión: No es posible
3. ¿A que es igual $0^3 + 1^3$? ¿existe un número entero que elevado a la 3 sea igual al resultado que obtuviste? 1
4. ¿A que es igual $2^3 + 5^3$? ¿existe un número entero que elevado a la 3 sea igual al resultado que obtuviste? No existe

Un poco de historia.... Como hemos visto, de acuerdo al teorema de Pitágoras existen números enteros positivos a, b y c tales que $a^2 + b^2 = c^2$. Ahora bien, no existen enteros positivos a, b y c tales que $a^3 + b^3 = c^3$. Tampoco existen enteros positivos a, b y c tales que $a^4 + b^4 = c^4$. En general, no existen enteros positivos a, b y c tales que $a^n + b^n = c^n$ con n un entero positivo mayor que 2.

Este resultado lo conjeturó Pierre Fermat francés en 1637, quien estudio leyes y trabajó entre otras cosas en teoría de números la conjetura resultó cierta y la demostró un matemático Inglés Andrew Wiles en el año 1995. El intento de muchos matemáticos por demostrar esta conjetura permitió el desarrollo de la teoría de números durante más de 300 años.

Actividad 3

1. Escriba 4 números que puedan escribirse de la forma $p = 4n + 1$, con $n \in \mathbb{N}$
   - Si n= 2, entonces $p = 4(2) + 1 = 8 + 1 = 9$
   - $Si\ n =$ 3, $entonces\ p =$ $4(3)+1 = 12+1 = 13$
   - $Si\ n =$ 4, $entonces\ p =$ $16+1=17$
   - $Si\ n =$ 5, $entonces\ p =$ 21
   - $Si\ n =$ 6, $entonces\ p =$ 25
2. Escriba otros 4 números de tal manera que p resulte un numero primo
   - $n = 1\ \ p = 4(1) + 1 = 5\ \ p = 5$
   - $Si\ n =$ 3 $entonces\ p =$ 13
   - $Si\ n =$ 4 $entonces\ p =$ 17
   - $Si\ n =$ 7 $entonces\ p =$ 29
   - $Si\ n =$ 9 $entonces\ p =$ 37
5. Use los números del punto 2 y verifique si se pueden escribir como la suma de dos cuadrados perfectos, si es así escriba la suma de la que provienen.
   - $5 = 2^2 + 1^2$
   - $13 = 3^2 + 2^2$
   - $17 = 4^2 + 1^2$
   - $29 = 5^2 + 2^2$
   - $37 = 6^2 + 1^2$
6. Escriba tres números primos que no cumplan la ecuación del punto 1, es decir que no sean de la forma 4n + 1 3, 7 y 11. ¿Es posible escribir estos números como la suma de dos cuadrados perfectos? No.
7. Por último, escriba una conclusión a partir de los resultados obtenidos en la actividad 3: No existe una formula para encontrar primos

Bibliografía

[1] Acevedo, P. H. (Junio de 2011). *El Teorema de Pitágoras construcción de algunos recursos didácticos* (Tesis Maestría). Bogotá, Cundinamarca, Colombia: Universidad Nacional de Colombia Sede Bogotá.

[2] Albis, V. (1973). *El señor de Fermat y sus problemas*. Boletin de Matemáticas, 219-232.

[3] Bermúdez, I. (2011). *Estudio De La Congruencia De Figuras Planas. Construcciones Con Regla Y Compas. Una Propuesta Para Sexto Grado*. (Tesis Maestría). San Andrés, San Andrés, Colombia: Universidad Nacional de Colombia

[4] Boyer, C. (1986). *Historia de la matemática.* (M. M. Pérez, Trad.) Madrid: Alianza Editorial.

[5] Euclides. (1956). *Elementos .* New York: Dover publications, INC.

[6] Gamboa, G. V. (2013). *El modelo de Van Hiele y la Enseñanza de la Geometría*. Uniciencia, *27*, 74-94.

[7] González, P. M. (2008). *Un Teorema llamado de Pitágoras. Una historia geométrica de 4000 años.* Sigma(32), 103-130.

[8] Guerrero, A. B. (2006). *Geometría desarrollo axiomático.* Bogotá: Ecoe Ediciones.

[9] Jiménez, D. (2006). *¿Qué era un irracional para un matemático griego antiguo?* Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, 87-103.

[10] Kline, M. (1994). *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días.* (M. M. Perez, Trad.) Madrid: Alianza Editorial.

[11] Mazenet, C. M. (2006). *Números Construibles.* (págs. 1-13). III Congreso Iberoamericano de Cabri IBEROCABRI.

[12] (MEN), M. d. (1998). *Estándares básicos de competencias en Matemáticas .* Bogotá D.C.

[13] Moise, E. E. (1986). *Geometría Moderna.* (M. García, Trad.) San Mateo, California: Addison-Wesley Iberoamericana.

[14] Prada, C. L. (2011). *Lecciones Epistemológicas de la Historia de la Geometría.* Cuestiones de Filosofía(13), 183-211.

[15] Vásquez, H. J. (Junio de 2014). *Las funciones trigonométricas seno y coseno a partir de sus aplicaciones*. (Tesis Maestría). Bogotá, Cundinamarca, Colombia: Universidad Nacional de Colombia Sede Bogotá.